Planche Oral Probas 3 - ESCP 2014 - Exercice 3.11

Exercice principal

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi de probabilité.

   Dans toute la suite, on désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé et suivant la même loi que X.

2. On considère la variable $Z = X + Y$.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $S = \frac{1}{1+Z}$
   (c) Calculer $E(\frac{X}{1+Z})$.

3. On considère maintenant la variable aléatoire $T = inf(X, Y)$ définie par :
   pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = min(X(\omega), Y(\omega))$.
   (a) Déterminer $P(X \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prouver que la loi de T est donnée par $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P(T = m) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}.(\frac{a}{1+a})^{2m}$$

Question sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M - \phi(M)A$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Question sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M - \phi(M)A$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Question sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M - \phi(M)A$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Question sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M - \phi(M)A$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.