Corrigé Planche Oral Probas 3 - ESCP 2014 - Exercice 3.11

Exercice principal

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Facile : il suffit de vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

   Dans toute la suite, on désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé et suivant la même loi que X.

2. On considère la variable $Z = X + Y$.

   (a) $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

   $$\begin{aligned} P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{n} P([X=k] \cap [Y=n-k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k).P(Y=n-k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}.\frac{a^{n-k}}{(1+a)^{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^n}{(1+a)^{n+2}} = (n+1).\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}} \end{aligned}$$

   (b) Comme S est bornée ($0 \leq S \leq 1$), S admet une espérance. D'après le théorème de transfert :

   $$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n}.P(Z=n) \\ &= \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{a}{1+a})^n \\ &= \frac{1}{1+a} \end{aligned}$$

   (c) Calculons $E(\frac{X}{1+Z}) = E(\frac{X}{1+X+Y})$.

   Tout d'abord, par raison de symétrie, $E(\frac{X}{1+Z}) = E(\frac{Y}{1+Z})$.
   On en déduit que

   $$E(\frac{1+Z}{1+Z}) = 1 = E(\frac{1}{1+Z}) + 2.E(\frac{X}{1+Z})$$

   D'où $E(\frac{X}{1+Z}) = \frac{a}{2(1+a)}$

3. On considère maintenant la variable aléatoire $T = inf(X, Y)$ définie par :
   pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = min(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned} P(X \leq n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \\ &= 1 - (\frac{a}{1+a})^{n+1} \end{aligned}$$

(b) $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P(T \geq m) &= P([X \geq m] \cap [Y \geq m]) \\
&= P(X \geq m).P(Y \geq m) \text{ par indépendance} \\
&= (P(X \geq m))^2 \\
&= (1 - P(X \leq m-1))^2 \\
&= (\frac{a}{1+a})^{2m}
\end{aligned}$$

D'où ensuite

$$\begin{aligned}
P(T = m) &= P(T \geq m) - P(T \geq m+1) \\
&= (\frac{a}{1+a})^{2m} - (\frac{a}{1+a})^{2m+2} \\
&= (\frac{a}{1+a})^{2m}.(1 - \frac{a^2}{(1+a)^2}) \\
&= \frac{1+2a}{(1+a)^2}.(\frac{a}{1+a})^{2m}
\end{aligned}$$

Question sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M - \phi(M)A$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

On montre d'abord facilement que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le cours, comme f est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, f bijective ssi f injective ssi $Ker(f) = \{0\}$.
On remarque que si $A = 0$ alors $f = Id$ donc f est bijective. Supposons maintenant que $A \neq 0$.

Soit $M \in Ker(f)$. Alors $M = \phi(M).A$ donc $M \in Vect(A)$.
Soit $M \in Vect(A)$, $M = \alpha.A$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(M) = \alpha.A - \alpha.\phi(A).A = (1 - \phi(A)).\alpha.A$$

- Si $\phi(A) = 1$, alors $f(M) = 0$ et ceci pour tout $M \in Vect(A)$, donc f n'est pas bijective.
- Si $\phi(A) \neq 1$, alors pour tout $M \in Vect(A)$, $f(M) = 0$ ssi $M = 0$, donc $Vect(A) \cap Ker(f) = \{0\}$. Comme $Ker(f) \subset Vect(A)$, on a $Ker(f) = \{0\}$, f est injective et donc bijective.

Bilan : $\boxed{f \text{ est bijective ssi } \phi(A) \neq 1}$