Planche Oral Analyse 3 - HEC 2024 - Sujet 9

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue.

1. Question de cours : rappeler l'inégalité des accroissements finis.

2. Ecrire une fonction Python ayant comme paramètres d'entrée deux réels a et b avec $a \leqslant b$, un entier $N \geqslant 1$ et une fonction h et qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale
$$\int_a^b h(t)dt$$
calculée par la méthode des rectangles à N pas.

3. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$$
converge.
On pose désormais pour tout $x \in [0,1[$:
$$F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$$

4. Montrer que la limite $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe et trouver sa valeur ℓ.

   On pose désormais $F(1) = \ell$.

5. Montrer que
$$\forall x \in [0,1], F(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}}ds$$

6. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1)$$

7. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que F dérivable en 1 si et seulement si $f(1) = 0$.

Question sans préparation

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives?

Question sans préparation

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives?

Question sans préparation

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives?

Question sans préparation

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives?