Corrigé de la Planche Oral Analyse 3 - HEC 2024 - Sujet 9

1. Voir programme.

2. import numpy

```
def F(a, b, h, N):
    t = numpy.linspace(a, b, N)
    res = 0
    for i in range(0, N):
        res = res + h(t[i])
    return res*(b-a)/N
```

ou aussi

```
def F(a, b, h, N):
    res = 0
    for i in range(0, N):
        res = res + h(a+i*(b-a)/N)
    return res*(b-a)/N
```

3. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x, 1]$. De plus, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$. Elle est donc bornée. Soit $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leqslant M$. On a
$$\forall t \in]x, 1], \left|\frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t-x}}$$
Or l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt$$
converge (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$). Donc l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$
converge absolument.

4. Avec les notations de la réponse à la question précédente, on a pour tout $x \in [0, 1[$:
$$0 \leqslant |F(x)| \leqslant \int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt = 2M[\sqrt{t-x}]_x^1 = 2M\sqrt{1-x}$$
Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \to 1^-} F(x) = 0$. Donc $\ell = 0$.

5. On vérifie facilement que l'identité est vraie quand $x = 1$. Soit $x \in [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - x$. En effectuant le changement de variable affine $t = x + (1 - x)s$, soit aussi
$$s = \frac{t-x}{1-x},$$
on a $t = x + (1 - x)s$ et
$\int_{x+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt = \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 (1-x) \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{(1-x)s}} ds = \sqrt{1-x} \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}} ds.$
On fait tendre $\varepsilon \to 0^+$(les deux intégrales convergent) et on obtient l'identité demandée.

6. Soit $x \in]0,1[$. On remarque tout d'abord que

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}} ds$$

De plus, comme

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \lim_{\epsilon \to 0} [2\sqrt{s}]_\epsilon^1 = 2$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}} ds - \int_0^1 \frac{f(1)}{\sqrt{s}} ds\right| \\ &= \left|\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds\right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{|f(x+(1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1 , il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\forall t \in [1-\eta, 1], |f(t) - f(1)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in [1-\eta, 1]$. On a pour tout $s \in [0,1], x+(1-x)s \in [1-\eta, 1]$
car $x \leqslant x+(1-x)s \leqslant x+(1-x) = 1$. Il en résulte que

$$\forall s \in [0,1], |f(x+(1-x)s) - f(1)| \leqslant \varepsilon.$$

et alors

$$\left|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1)\right| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi : $\forall \epsilon'$, en prenant $\varepsilon = \epsilon'$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x tel que $x \in]1-\eta, 1[$, $|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1)| \leq 2\varepsilon = \epsilon'$. Par définition de la limite, on a bien

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1)$$

7. Si F est dérivable en 1 , on a

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x}\frac{F(x) - F(1)}{x-1} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

Donc $f(1) = 0$ par unicité de la limite. Réciproquement, si $f(1) = 0$. On a d'après l'IAF (il faut bien qu'elle serve quelque part !!):

$$\left|\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x+(1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|x+(1-x)s-1|}{\sqrt{s}} ds = C_f(1-x)$$

avec

$$C_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|s-1|}{\sqrt{s}} ds$$

D'où

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 0$$

On en déduit que F est dérivable à gauche en 1 et $F'(1) = 0$.

Solution QSP

La matrice Γ est évidemment symétrique réelle donc diagonalisable.
Aide possible pour la suite : calculer ${}^t U \Gamma U$ de deux manières différentes.
Soit λ une valeur propre de Γ et $U = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On calcule ${}^t U \Gamma U$ de deux manières. D'abord ${}^t U \Gamma U = \lambda\, {}^t U U = \lambda \|U\|^2$, mais aussi :

$$\begin{aligned}
{}^t U \Gamma U &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) \\
&= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i, \sum_{j=1}^{n} u_j X_j \right) \quad \text{par bilinéarité de la covariance} \\
&= \mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda = \frac{\mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n)}{\|U\|^2} \geqslant 0$.
Remarquons que $\lambda = 0$ si, et seulement si $V(u_1 X_1 + \dots u_n X_n) = 0$, i.e. si, et seulement si, $u_1 X_1 + \dots u_n X_n$ est constante presque-sûrement.

On en déduit donc que les valeurs propres de Γ sont toutes strictement positives si, et seulement si, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ n'est pas constante presque-sûrement.