Planche Oral Probas 1 - ESCP 2024 - EX. 3.1 (format 2025)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace telle que, pour tout $t > 0$, on a $P(X > t) \neq 0$. On note F la fonction de répartition de X .

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X .

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $N_\theta(\omega)$ le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $X_k(\omega) > \theta$.

On admet que N_θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Reconnaître la loi de N_θ .
2. Soit $x > \theta$. On définit la variable aléatoire R_θ par, pour tout $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{si } N_\theta(\omega) = k \text{ alors } R_\theta(\omega) = X_k(\omega)$$

On admet que R_θ est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P([N_\theta = k] \cap [R_\theta \leq x]) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leq \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leq x]\right)$$

- (b) Exprimer $P(R_\theta \leq x)$ en fonction de F .

- (c) Que vaut $P(R_\theta \leq x)$ si $x \leq \theta$?

3. Dans cette question, on suppose qu'une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$. Montrer que $\left(\frac{R_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable à densité dont on précisera une densité.

Question sans préparation (ESCP 2024)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m)$ deux m -uplets d'éléments de E tels que:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, \langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les familles $(u_1, \dots, u_m)$ et $(v_1, \dots, v_m)$ sont libres.
2. Soit p le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel F engendré par $(u_1, \dots, u_m)$.

$$\text{Montrer que pour tout } x \text{ dans } E, \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle.$$

Question sans préparation (ESCP 2024)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m)$ deux m -uplets d'éléments de E tels que:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, \langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les familles $(u_1, \dots, u_m)$ et $(v_1, \dots, v_m)$ sont libres.
2. Soit p le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel F engendré par $(u_1, \dots, u_m)$.

$$\text{Montrer que pour tout } x \text{ dans } E, \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle.$$

Question sans préparation (ESCP 2024)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m)$ deux m -uplets d'éléments de E tels que:

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, \langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les familles $(u_1, \dots, u_m)$ et $(v_1, \dots, v_m)$ sont libres.
2. Soit p le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel F engendré par $(u_1, \dots, u_m)$.

$$\text{Montrer que pour tout } x \text{ dans } E, \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle.$$