Corrigé Oral Probas 1 - ESCP 2024 - EX. 1.2 (format 2025)

1. Comme N_θ est le rang d'apparition k du premier succès ($X_k > \theta$), que les succès sont indépendants car les X_k le sont, et de même probabilité $1 - F(\theta)$, on reconnaît que $N_\theta \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - F(\theta))$.

   Donc $E(N_\theta) = \dfrac{1}{1 - F(\theta)}$ (NB : on a bien $0 < 1 - F(\theta)$ par hypothèse).

2. (a) $[R_\theta \leq x]$ et $[N_\theta = k]$ sont réalisés si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $[X_i \leq \theta]$ est réalisé, ainsi que $[X_k > \theta]$ et $[X_k \leq x]$ puisqu'alors $R_\theta = X_k$. Donc

   $$[R_\theta \leq x] \cap [N_\theta = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leq \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leq x]$$

   d'où l'égalité des probabilités.

   (b) Appliquons la FPT avec le SCE $([N_\theta = k])_{k \geq 1}$:

   $$\begin{aligned}
   P(R_\theta \leq x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([R_\theta \leq x] \cap [N_\theta = k]) \\
   &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leq \theta]) \cap [\theta < X_k \leq x]) \\
   &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(X_i \leq \theta)\right) P(\theta < X_k \leq x) \text{ par indépendance} \\
   &= \sum_{k=1}^{+\infty} (F(\theta))^{k-1} (F(x) - F(\theta)) = (F(x) - F(\theta)) \sum_{k=1}^{+\infty} (F(\theta))^{k-1} \\
   &= \frac{F(x) - F(\theta)}{1 - F(\theta)} = \frac{F(x) - 1 + 1 - F(\theta)}{1 - F(\theta)} = 1 - \frac{1 - F(x)}{1 - F(\theta)}.
   \end{aligned}$$

   (c) Si $x < \theta$, $P(R_\theta \leq x) = 0$

3. De façon classique pour la loi de Cauchy, la variable X a pour fonction de répartition: pour tout x réel, $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   Classiquement pour $x > 0$, $\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$.
   D'où $1 - F(x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(1/x) \sim_{x \to +\infty} \frac{1}{\pi . x}$.
   via $Arctan(x) = Arctan(0) + Arctan'(0).x + o(x)$ (Taylor-Young).

   Si $x < 1$, on a $P\left(\dfrac{R_n}{n} < x\right) = P\left(R_n < nx\right) = 0$ car $nx < n$
   Si $x \geq 1$, on a

   $$P\left(\frac{R_n}{n} \leq x\right) = P\left(R_n \leq nx\right) = 1 - \frac{1 - F(nx)}{1 - F(n)}$$

   Or

   $$\frac{1 - F(nx)}{1 - F(n)} \sim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{\pi n x}}{\frac{1}{\pi n}} = \frac{1}{x}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} \to_{n\to+\infty} P\left(\frac{R_n}{n} \leq x\right) = 1 - 1/x$.

Notons Y la variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} \ \text{ si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Alors $\left(\frac{R_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y qui a pour densité :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x < 1 \\ \frac{1}{x^2} \ \text{ si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

Solution QSP

1. Soit $a_1, ..., a_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0$.

   On a alors pour tout j , $\left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i u_i, v_j \right\rangle = 0$,
   d'où par linéarité du produit scalaire, $a_j \langle u_j, v_j \rangle = 0$ i.e. $a_j = 0$ ce qui prouve que $(u_1, ..., u_m)$ est libre.

   Raisonnement analogue pour $(v_1, ..., v_m)$.

2. Soit x un vecteur qui s'écrit $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Alors $p(x) = y$ d'où $\|p(x)\|^2 = \|y\|^2$.

   Or $y \in F$, d'où il existe $a_1, ..., a_m$ des réels tels que $y = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$. On voit que $a_i = \langle y, v_i \rangle$. D'où:

   $$\|y\|^2 = \left\langle y, \sum_{i=1}^{m} \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle y, u_i \rangle \langle y, v_i \rangle$$

   Or $\langle x, u_i \rangle = \langle y + z, u_i \rangle = \langle y, u_i \rangle$ car z est orthogonal à F donc à u_i.

   Et $\langle y, v_i \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle x, p(v_i) \rangle$ par symétrie de p.

   Finalement $\|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle$.