Planche Oral Algèbre 3 -ESCP 2022 - Sujet 7 (version 2025)

Exercice principal

Soit un entier $n \geq 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. $\text{Ker}(M)$ et $\text{Im}(M)$ désignent respectivement le noyau et l'image d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier supérieur ou égal à 1. On note $v_k = \dim(\text{Ker}(A^k))$ la dimension de $\text{Ker}(A^k)$ et $w_k = \dim(\text{Im}(A^k))$ la dimension de $\text{Im}(A^k)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(A^k) \subset \text{Ker}(A^{k+1})$ pour $k \geq 1$. En déduire que $(v_k)_{k \geq 1}$ est une suite croissante.
2. Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$.
Montrer que $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. Que peut-on alors dire de la suite d'entiers $(v_k)_{k \geq k_0}$?

Pour le reste de l'exercice, on définit les notions suivantes.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $M^m = 0$.

Pour une matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son indice de nilpotence par :

$$p = \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid M^m = 0\}.$$

3. Donner trois exemples de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: un où $p = 1$, un où $p = 2$ et un où $p = 3$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $p \leq n$.
5. On suppose ici que $n \geq 2$. Soit $B = (b_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $b_{i,j}$ sont définis par :

$$b_{i,i+1} = 1 \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ et } b_{i,j} = 0 \text{ pour } j \neq i+1.$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M donnée par :

$$M^2 = B.$$

Question sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Question sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Question sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Question sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Question sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne $\theta = E(X_1)$ qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.