Planche Oral Algèbre 3 -ESCP 2022 - Sujet 7 (version 2025)

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^k)$. On a donc $A^k\, x = 0$. En composant par A, il vient $A^{k+1}\, x = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(A^{k+1})$ et on conclut que $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$. Ainsi, $v_k \leq v_{k+1}$ et la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ est une suite croissante.

2. Supposons que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$. D'après la question 1), $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Par conséquent, on a $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Montrons alors que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Nous savons d'après la question 1) que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$, on a alors $A^{k_0+2}\, x = A^{k_0+1}Ax = 0$. Ainsi, on a $A\, x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0})$ et donc $A^{k_0}Ax = 0 = A^{k_0+1}x$. On conclut que $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$ et que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+2}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. On a alors finalement $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$ et $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. On montrerait alors aisément par récurrence que pour $k \geq k_0$, on a $v_k = v_{k_0}$. La suite $(v_k)_{k\geq k_0}$ est donc constante.

3. On a $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$ respectivement pour les trois matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$:
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Il est clair que $A_1 = 0$, $A_2^2 = 0$ (avec $A_2 \neq 0$) et $A_3^3 = 0$ (avec $A_3 \neq 0$ et $A_3^2 \neq 0$), donc leurs indices de nilpotence sont respectivement 1, 2 et 3.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Supposons par l'absurde que $p > n$. On a donc d'une part, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A^j \neq 0$ et d'autre part, $A^p = 0$ et donc $v_p = n$. Une matrice nilpotente ne peut être inversible (car $A^p = 0$) donc $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$ et $v_1 \geq 1$. De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ car si $v_j = v_{j+1}$, la suite $(v_k)_{k\geq j}$ est constante et donc $v_j = v_p = n$; on aurait alors $\mathrm{Ker}(A^j) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A^j = 0$, ce qui est impossible car $j \leq n < p$. Comme $(v_j)_{j\geq 1}$ est une suite d'entiers croissante et que pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ et que $v_1 \geq 1$, il s'ensuit que $v_j \geq j$ pour $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ainsi, on a $v_{n+1} > n$, ce qui est absurde car la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ est bornée par n. On conclut donc que $p \leq n$.

5. Il est aisé de vérifier que $B^{n-1} \neq 0$ et que $B^n = 0$. Donc B est nilpotente. On a alors si $M^2 = B$: $M^{2(n-1)} = B^{n-1} \neq 0$ et $M^{2n} = B^n = 0$. Ainsi M est également nilpotente et son indice de nilpotence p vérifie $2(n-1) < p$ (car $M^{2(n-1)} \neq 0$) et $p \leq n$ (d'après la question précédente). Ainsi $2(n-1) < n$ et donc $n < 2$ ce qui est impossible car on a supposé que $n \geq 2$. L'équation matricielle $M^2 = B$ n'admet donc pas de solution.

$\boxed{\textbf{QSP}}$

Comme l'estimateur doit être sans biais, on a $\sum_{i=1}^n a_i.E(X_1) = E(X_1)$ donc $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.
De plus, $V(\tilde{\theta_n}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_1) = V(X_1).\sum_{i=1}^n a_i^2$ par indépendance des X_i.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée avec $u = (a_1, ..., a_n)$ et $v = (1, ..., 1)$,

$$| < u, v > |^2 \leq ||u||^2.||v||^2 \Leftrightarrow |\sum_{i=1}^n a_i|^2 \leq n.\sum_{i=1}^n a_i^2$$

donc $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n}$, avec égalité ssi u et v sont colinéaires, donc ssi tous les a_i sont égaux à $\frac{1}{n}$. Finalement, on a $\tilde{\theta_n} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^n X_i$: on retrouve la moyenne empirique !