Planche Oral Analyse 2 - ESCP 2019 - EX. 1.2 (version oral 2025)

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}dt$$

1. (a) L'application φ est-elle injective ?

   (b) L'application φ est-elle surjective de E sur E ?

   On note f_0 la fonction constante égale à 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \varphi(f_n)$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n.x^{\beta_n}$, avec α_n et β_n deux réels et donner des relations de récurrence vérifiées par les suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer $\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$ et $\sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$.

   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $M_n = max_{x\in[0,1]}|f_n(x) - \frac{1}{4}x^2|$, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Question sans préparation

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

Question sans préparation

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

Question sans préparation

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

Question sans préparation

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.