

Planche Oral - ESCP 2019 - EX. 1.2

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

1. (a) En notant f_0 la fonction constante égale à 1, on a $f_0 \in E$, mais $-f_0 \notin E$. Donc E n'est pas un espace vectoriel.
- (b) Soit $f \in E$. Par composition, $t \mapsto \sqrt{f(t)}$ est continue sur $[0, 1]$. En notant G une primitive de cette fonction, on a alors :

$$\forall x \in [0, 1], \varphi(f)(x) = G(x) - G(0)$$

Comme G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, $\varphi(f)$ l'est aussi. De plus,

$$\varphi(f)'(x) = G'(x) = \sqrt{f(x)}$$

- (c) Soit f et g deux fonctions de E , telles que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Alors leurs dérivées sont égales, donc $\forall x \in [0, 1], \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. D'où $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x)$, c'est-à-dire que $f = g$: φ est injective.
- (d) D'après le 1.b), si $f \in E$ alors $\varphi(f) \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Par conséquent si g est une fonction continue positive sur $[0, 1]$ mais qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (par exemple la fonction racine carrée), alors g n'admet pas d'antécédent par φ .
Donc φ n'est pas surjective de E dans E .

On note f_0 la fonction constante égale à 1, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \varphi(f_n)$.

2. (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: "il existe des réels $\alpha_n \geq 0$ et $\beta_n \geq 0$ tels que $f_n : x \mapsto \alpha_n \cdot x^{\beta_n}$ ".
 - Initialisation : si $n = 0$, $f_0 = 1 = \alpha_0 \cdot x^{\beta_0}$ où $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.
 - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x \sqrt{\alpha_n \cdot t^{\frac{\beta_n}{2}}} dt \\ &= \left[\sqrt{\alpha_n} \cdot \frac{1}{\frac{\beta_n}{2} + 1} \cdot t^{\frac{\beta_n}{2} + 1} \right]_0^x \\ &= \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2} + 1} \cdot x^{\frac{\beta_n}{2} + 1} \\ &= \alpha_{n+1} \cdot x^{\beta_{n+1}} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ vraie.

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2} + 1} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1.$$

(c) (β_n) est une suite AG. Par la méthode classique, on a $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$ (ou récurrence).

3. (a) D'une part,

$$\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} = \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\frac{\beta_{n+1}}{2} + 1}}{\alpha_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{n+1}} \cdot \left(\frac{\beta_{n+1}}{2} + 1\right)}$$

D'autre part,

$$\sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{n+1}} \cdot \left(\frac{\beta_n}{2} + 1\right)}$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ donc la suite (β_n) est croissante. On en déduit que $\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$.

- (b) Comme $\alpha_0 = \alpha_1$, par récurrence immédiate pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq 1$. Donc la suite (α_n) est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge vers $l \geq 0$.

En passant à la limite dans la relation du 2.b), $l = \frac{\sqrt{l}}{2}$ donc $l = 0$ ou $\sqrt{l} = \frac{1}{2} : l = 0$ ou $l = \frac{1}{4}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq \frac{1}{4}$.

- Initialisation : si $n = 0$, $\alpha_0 = 1 \geq \frac{1}{4}$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \geq \frac{1}{4}$. Comme $\alpha_{n+1} = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2} + 1}$, on a $\sqrt{\alpha_n} \geq \frac{1}{2}$ donc $\alpha_{n+1} \geq \frac{1}{\beta_n + 2}$. Comme $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$, on a $\beta_n \leq 2$ donc $\beta_n + 2 \leq 4$ et enfin $\alpha_{n+1} \geq \frac{1}{4}$.
- Bilan : la suite (α_n) est minorée par $\frac{1}{4}$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{4}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto |f_n(x) - \frac{1}{4}x^2|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc admet bien un maximum sur ce segment.

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - \frac{1}{4}x^2| &= |\alpha_n \cdot x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^2| \\ &= |\alpha_n \cdot x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^{\beta_n} + \frac{1}{4}x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^2| \\ &\leq |\alpha_n \cdot x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^{\beta_n}| + |\frac{1}{4}x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^2| \\ &\leq |\alpha_n - \frac{1}{4}| + \frac{1}{4}|x^{\beta_n} - x^2| \text{ car } x^{\beta_n} \leq 1 \end{aligned}$$

où on sait déjà que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - \frac{1}{4} = 0$.

Soit $g : x \mapsto x^{\beta_n} - x^2$. Alors $g'(x) = \beta_n \cdot x^{\beta_n-1} - 2x$, donc $\forall x \in]0, 1]$,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \beta_n \cdot x^{\beta_n-1} - 2x = 0 \Leftrightarrow x^{\beta_n-2} = \frac{2}{\beta_n} \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{\beta_n-2}} = \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\frac{1}{2-\beta_n}}$$

Donc

$$\text{Max}_{x \in [0,1]} |g(x)| = \left| \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\frac{\beta_n}{2-\beta_n}} - \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\frac{2}{2-\beta_n}} \right|$$

On sait que $\beta_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. D'où

$$\text{Max}_{x \in [0,1]} |g(x)| = \left| \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{2^{n-1} \cdot \beta_n} - \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{2^n} \right| = \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{2^{n-1}} \cdot \left(\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\beta_n} - \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^2 \right)$$

D'une part, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{\beta_n} - \left(\frac{\beta_n}{2}\right)^2 = 1 - 1 = 0$.

D'autre part, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{2} = 1$, on a $\ln\left(\frac{\beta_n}{2}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{2} - 1 = \frac{1}{2^n}$. Ainsi

$$\left(\frac{\beta_n}{2}\right)^{2^{n-1}} = \exp(2^{n-1} \cdot \ln\left(\frac{\beta_n}{2}\right))$$

et

$$2^{n-1} \cdot \ln\left(\frac{\beta_n}{2}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{\beta_n}{2})^{2^{n-1}} = \exp(\frac{1}{2})$ et enfin par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Max}_{x \in [0,1]} |g(x)| = 0$ et par majoration, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0}$

Question sans préparation

Le système en question est équivalent à

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ (X - Y)u = Z - Y \end{cases}$$

et ce système a une infinité de solutions ssi $X - Y = 0$ (car sinon il n'y aurait qu'une seule solution) et $Z - Y = 0$ (car sinon il n'y en aurait aucune). On cherche donc à calculer la probabilité de $X = Y = Z$.

$$\begin{aligned} P(X = Y = Z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k] \cap [Z = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^3 \text{ par indépendance} \\ &= p^3 \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (q^3)^i \\ &= p^3 \cdot \frac{1}{1 - q^3} \end{aligned}$$