

Planche Oral - ENSAE 2021 - Planche 5

Ce sujet est composé de deux exercices.

Le candidat doit les traiter **tous les deux** puis les exposer dans l'ordre de son choix.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans les questions 1)2)3)

1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ est convergente.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.
Montrer que $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.

3. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$$

(b) Montrer que f réalise une bijection continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

4. Calculer cette intégrale

(on pourra éventuellement effectuer le changement de variable $u = x + e^t$).

Exercice 2

On note p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit qu'une variable X suit la loi de Rademacher de paramètre p si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et si :

$$P(X = 1) = p \quad P(X = -1) = q$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{R}(p)$.

Dans tout l'exercice, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher de paramètre p .

1. Calculer $E(X_k)$ et $Var(X_k)$.

2. Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire T_n :

$$T_n = \prod_{k=0}^n X_k$$

(a) Calculer $E(T_n)$.

(b) En déduire la loi de T_n .

3. Soit K une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose, pour tout ω de Ω :

$$T(\omega) = \prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$$

On admet que T est une variable aléatoire.

(a) Calculer $E(T)$.

(b) Donner la loi de T .