$\boxed{\textbf{Corrigé Planche Oral - ENSAE 2021 - Planche 5}}$

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter **tous les deux** puis les exposer dans l'ordre de son choix.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans les questions 1)2)3)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq e^{-t}$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, par critère de comparaison l'intégrale $f(x)$ est convergente.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y - x}{(x + e^t)(y + e^t)}dt = (y - x).\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + e^t)(y + e^t)}dt$$

d'où

$$0 < f(x) - f(y) \leq (y - x).\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{y - x}{2}$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x.e^t} + e^t \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$$

   (b) La fonction f est strictement décroissante d'après le 2.
   De plus elle est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, car toujours d'après 2., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$$

   d'où par encadrement $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

   Ensuite, $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

   Enfin, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x.e^t}}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   d'où en passant à la limite, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   Finalement, par le théorème de la bijection,
   $\boxed{f \text{ réalise une bijection continue et strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ sur }]0, 1]}$

   Tout ceci est archi-classique...

4. Le changement de variables suggéré n'est pas utile... Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xe^{-t}} = \lim_{A \to +\infty} [-\frac{1}{x} \ln(1 + xe^{-t})]_0^A = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

   et $f(0) = 1$.

Exercice 2

On note p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On dit qu'une variable X suit la loi de Rademacher de paramètre p si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et si :

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = -1) = q$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{R}(p)$.
Dans tout l'exercice, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher de paramètre p.

1. $E(X_k) = (-1).q + 1.p = p - q = 2p - 1$. $E(X_k^2) = 1$ donc $Var(X_k) = 1 - (p - q)^2$.

2. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire T_n :

$$T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$$

   (a) Les variables étant indépendantes, $E(T_n) = \prod_{k=0}^{n} E(X_k) = (p - q)^{n+1} = (2p - 1)^{n+1}$.

   (b) On sait que $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc T_n suit encore une loi de Rademacher. Notons r son paramètre. Alors $2r - 1 = (2p - 1)^{n+1}$ donc $r = \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^{n+1}$.

3. Soit K une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant la loi de Poisson de paramètre λ $(\lambda > 0)$.
   On pose, pour tout ω de Ω :

$$T(\omega) = \prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$$

   On admet que T est une variable aléatoire.

   (a) On utilise la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(K = n).E(T|K = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.e^{-\lambda}.(2p - 1)^{n+1} \\ &= (2p - 1).e^{-\lambda}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((2p - 1)\lambda)^n}{n!} \\ &= (2p - 1).e^{-\lambda}.e^{(2p-1)\lambda} \\ &= (2p - 1).e^{(2p-2)\lambda} \end{aligned}$$

   (b) $T(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc T suit encore une loi de Rademacher. Son paramètre s vérifie alors $2s - 1 = (2p - 1).e^{(2p-2)\lambda}$, ce qui donne la valeur de s.