$\boxed{\textbf{Corrigé Planche Oral Analyse 4 - ESCP 2023 - Sujet 2.10}}$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ uniquement. Comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est de la parité de n, il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. De façon classique, on a $t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ entraîne celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ aussi.
Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.

   (b) On sait que si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$, alors $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ est une densité de f.
De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, on déduit $I_0 = \sqrt{\pi}$. De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X) = 0$, on déduit $I_1 = 0$.
De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = E(X^2) = V(X) + 0 = \frac{1}{2}$, on déduit $I_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (c) Par imparité $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$.
Pour I_4, par intégration par parties avec $u(t) = t^3$ et $v'(t) = te^{-t^2}$ qui sont C^1 (faites-la pour vous entrainer !!), il vient $I_4 = \dfrac{3}{2} I_2 = 3\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$(t - x)^2(t - y)^2 = t^4 - 2(x + y)t^3 + (x^2 + y^2 + 4xy)t^2 - 2xy(x + y)t + x^2y^2$$
par linéarité pour les intégrales convergentes, grâce aux questions précédentes, il vient immédiatement que $G(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et que :
$$G(x, y) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\big(I_4 - 0 + (x^2 + y^2 + 4xy)I_2 + 0 + x^2y^2 I_0\big) = 4x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 8xy + 3.$$

3. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale. Déterminons les points critiques de G. On a $\nabla G(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 4x + 8y \\ 8x^2y + 4y + 8x \end{pmatrix}$. Et
$$\begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2x^2y + y + 2x = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2xy(x - y) + (x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ (x - y)(2xy + 1) = 0 \end{cases}.$$
1er cas : $y = x$. Alors $2x^3 + 3x = 0$. Un seul point critique de ce type $O(0, 0)$.
2ème cas : $y \neq x$, alors $2xy = -1$ puis $-y + x + 2y = 0$, soit $y = -x$ et $2x^2 = 1$.
Ainsi, $\boxed{G \text{ possède trois points critiques}}$:
$O = (0, 0)$, $A = \big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big)$ et $B = \big(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\big)$.

Comme on a $G(x, y) = G(y, x)$ pour tout x, y, on en déduit que A et B sont de même nature.

- Étude du point $O(0,0)$. On a donc $H_G(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. On remarque par exemple que

$$H_G(0,0).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$H_G(0,0).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Par conséquent $\lambda_1 = 12 > 0$ et $\lambda_2 = -4 < 0$ sont des valeurs propres de $H_G(0,0)$: $O(0,0)$ est un point col et $\boxed{G \text{ n'a pas d'extrémum local en } (0,0).}$
  On peut aussi calculer le spectre en passant par $det(H_G(0,0) - \lambda.I_2)$.

- Étude du point $A\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$ (idem en B)
  On a $H_G\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
  de valeur propre double 8.
  On a $8 > 0$, donc $\boxed{G \text{ présente un minimum local en } A \text{ de valeur } G\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = 2.}$

Comme il n'y a pas de maximum local, $\boxed{\text{il n'y a pas non plus de maximum global.}}$
Si G admet un minimum global, alors il est atteint en A et B et il vaut 2.

Or pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G(x,y) - 2 - 2(x+y)^2 = 4x^2y^2 + 4xy + 1 = (2xy+1)^2 \geqslant 0$.
On en déduit que $G(x,y) \geqslant 2 + 2(x+y)^2 \geqslant 2$.
Ainsi, $\boxed{2 \text{ est bien le minimum global de } G \text{ et il est atteint en } A \text{ et } B.}$

Question sans préparation

1. $Y_n = X_1^{1/n} \times \cdots \times X_n^{1/n}$. Comme les variables X_1, ..., X_n sont indépendantes, par coalition il en est de même pour $X_1^{1/n}$, ..., $X_n^{1/n}$. On a alors

$$E(Y_n) = E(X_1^{1/n}) \times \cdots \times E(X_n^{1/n}) = (E(X_1^{1/n}))^n$$

puisque les variables suivent la même loi. D'après le th. de transfert ($X_1^{1/n}$ est bornée donc son espérance existe) :

$$E(X_1^{1/n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{1/n}.f_{X_1}(t)dt = \int_0^1 t^{1/n}dt = [\frac{t^{1+1/n}}{1+1/n}]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

D'où
$$E(Y_n) = (\frac{n}{n+1})^n$$

On a aussi
$$E(Y_n^2) = E(X_1^{2/n}) \times \cdots \times E(X_n^{2/n}) = (E(X_1^{2/n)})^n$$

et
$$E(X_1^{2/n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2/n}.f_{X_1}(t)dt = \int_0^1 t^{1/n}dt = [\frac{t^{1+2/n}}{1+2/n}]_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

D'où
$$E(Y_n^2) = (\frac{n}{n+2})^n$$

et
$$V(Y_n) = (\frac{n}{n+2})^n - (\frac{n}{n+1})^n$$

2. $$E(Y_n) = (\frac{n}{n+1})^n = (1 - \frac{1}{n+1})^n = e^{n.\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

De façon classique $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = e^{-1}$.
On montre aussi que $\lim_{n\to+\infty} V(Y_n) = e^{-1} - e^{-1} = 0$ (même genre).
D'après la condition suffisante de convergente des estimateurs, (Y_n) converge en probabilité vers e^{-1}.