

Planche Oral Algèbre 4 - ESCP 2021 - EX. 1.16

Soit n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$. Soit une matrice **rectangulaire** non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à n lignes et p colonnes.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier $r \in [[1, p]]$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ et ${}^tQ {}^tAAQ = D$,
où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent $d_{i,i} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout entier $i \in [[1, p]]$, on note X_i la i -ème colonne de Q .

2. (a) Montrer que le rang de tAA est égal à r .
(b) Montrer que pour tout $i \in [[1, r]]$, AX_i est un vecteur propre de la matrice $A {}^tA$ associé à la valeur propre λ_i . En déduire que les matrices $A {}^tA$ et tAA ont les mêmes valeurs propres non nulles.
(c) Soit $(U_1, \dots, U_s)$ une base du sous-espace propre de tAA associé à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(AU_1, \dots, AU_s)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille libre.
(d) En déduire que les sous-espaces propres de $A {}^tA$ et tAA associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension et que le rang de $A {}^tA$ est égal à r .

3. Pour tout $i \in [[1, r]]$, on pose $Y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot AX_i$.

- (a) Montrer que la famille $(Y_1, \dots, Y_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $A {}^tA$.
(b) En déduire qu'il existe des vecteurs $Y_{r+1}, \dots, Y_n$ pour lesquels la famille $(Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}, \dots, Y_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A {}^tA$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $i \in [[1, n]]$, la i -ème colonne de P est la matrice-colonne Y_i .

Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent $\delta_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \text{si } i = j \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $A = P \cdot \Delta \cdot {}^tQ$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaitre la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.