Corrigé Planche Oral Algèbre 4 - ESCP 2021 - EX. 1.16

Soit n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$. Soit une matrice **rectangulaire** non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à n lignes et p colonnes.

1. On remarque que ${}^t\left({}^tAA\right) = {}^tAA$, donc la matrice ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique. D'après le cours, elle est orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que ${}^tAA = Q.D.{}^tQ$.
   De plus, si λ est une valeur propre de ${}^tA.A$ et si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, est un vecteur-colonne propre associé à λ, alors
   $${}^tA.AX = \lambda X \Rightarrow {}^tX.{}^tA.A.X = \lambda\, {}^tX.X \Rightarrow ||AX||^2 = \lambda.||X||^2$$
   Comme $X \neq 0$, $||X|| > 0$ et donc $\lambda \geq 0$. Ainsi $Spec({}^tA.A) \subset \mathbb{R}_+$. En notant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ les valeurs propres non nulles de ${}^tA.A$, on peut alors prendre $D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$.

   Pour tout entier $i \in [[1, p]]$, on note X_i la i-ème colonne de Q.

2. (a) Deux matrices semblables représentent le même endomorphismes dans des bases différentes, elles ont donc le même rang. D'où
   $$rg({}^tAA) = rg(D) = rg(Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) = r$$
   (b) Soit $i \in [[1, r]]$.
   Tout d'abord, par définition de X_i et de la matrice Q, $X_i \neq 0$ est un vecteur-colonne propre de la matrice ${}^tA.A$ associé à la valeur propre λ_i. On a alors
   $$(A\,{}^tA).AX_i = A.({}^tAA).X_i = A.\lambda_i X_i = \lambda_i.AX_i$$
   Supposons que $AX_i = 0$. Alors on aurait ${}^tA.AX_i = 0$ donc $\lambda_i.X_i = 0$ et $\lambda_i = 0$ (car $X_i \neq 0$) : absurde car par hypothèse $\lambda_i \neq 0$. Donc : $(A\,{}^tA).AX_i = \lambda_i.AX_i$ et $AX_i \neq 0$: AX_i est bien un vecteur propre de $A\,{}^tA$ associé à la valeur propre λ_i.
   Par conséquent, si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de ${}^tA.A$ alors c'est aussi une valeur propre de $A.{}^tA$.
   Par raison de symétrie, la réciproque est également vraie.
   <u>Bilan :</u> $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
   (c) Soit $(U_1, \cdots, U_s)$ une base du sous-espace propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ non nulle. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ tels que $\alpha_1.AU_1 + \cdots + \alpha_s.AU_s = 0$. En appliquant la matrice ${}^tA$:
   $$\begin{aligned} & {}^tA.(\alpha_1 AU_1 + \cdots + \alpha_s.AU_s) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1\, {}^tA.AU_1 + \cdots + \alpha_s.{}^tAAU_s = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1\lambda.U_1 + \cdots + \alpha_s.\lambda U_s = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_s U_s = 0 \text{ car } \lambda \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0 \text{ car famille libre} \end{aligned}$$
   Donc la famille $(AU_1, \cdots, AU_s)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille libre. D'après la question précédente, cette famille est formée de vecteurs propres de $A.{}^tA$ associés à λ.
   (d) Soit λ une valeur propre non nulle de ${}^tA.A$ et E_λ le sous-espace propre associé. On sait que λ est aussi une valeur propre de $A.{}^tA$; notons F_λ le sous-espace propre correspondant.
   D'après le résultat précédent, $\dim F_\lambda \geq \dim E_\lambda$. Par raisons de symétrie, l'inégalité inverse est également vraie, donc $\boxed{\dim E_\lambda = \dim F_\lambda}$.

   Enfin,
   $$\begin{aligned} rg(A.{}^tA) &= n - \dim Ker(A.{}^tA) \\ &= \sum_{\lambda \in Sp(A.{}^tA),\ \lambda\neq 0} \dim F_\lambda \\ &= \sum_{\lambda \in Sp({}^tA.A),\ \lambda\neq 0} \dim E_\lambda \\ &= p - \dim Ker({}^tA.A) \\ &= rg({}^tA.A) = r \end{aligned}$$

Ainsi $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ ont le même rang.

3. Pour tout $i \in [[1,r]]$, on pose $Y_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}.AX_i$.

   (a) On sait déjà que $(Y_1, \cdots, Y_r)$ est formée de vecteurs propres de $A.{}^tA$. Soit $(i,j) \in [[1,r]]^2$.

$$\begin{aligned} \langle Y_i, Y_j \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i.\lambda_j}}.{}^tX_j.{}^tA.A.X_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i.\lambda_j}}.\lambda_i.{}^tX_j.X_i \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

   car la famille $(X_1, \cdots, X_r)$ est orthogonale (ce sont les colonnes d'une matrice orthogonale).
   Bilan : $(Y_1, \cdots, Y_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $A\,{}^tA$.

   (b) Par raisons de dimension, $(Y_1, \cdots, Y_r)$ est une base orthonormé du sous-espace vectoriel obtenu en sommant les sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $A.{}^tA$. Si $r = n$, cette famille convient. Sinon, on considère une BON $(Y_{r+1}, \cdots, Y_n)$ de $Ker(A.{}^tA)$ et la famille $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est bien une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A\,{}^tA$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $i \in [[1,n]]$, la i-ème colonne de P est la matrice-colonne Y_i.
   Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent $\delta_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} \text{ si } i = j \leq p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
   Pour tout $i \in [[1,r]]$, $AX_i = \sqrt{\lambda_i}.Y_i$. Pour tout $i \in [[r+1,n]]$, on a $AX_i = 0$ car

$$\|AX_i\|^2 = {}^tX_i.{}^tA.A.X_i = {}^tX_i.0 = 0$$

   On en déduit que

$$A.(X_1|\cdots|X_n) = (\lambda_1 Y_1|\cdots|\lambda_r Y_r|0|\cdots|0) \Leftrightarrow AQ = (Y_1|\cdots|Y_n).Diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \cdots, 0) \Leftrightarrow AQ = P\Delta$$

   Enfin Q est orthogonale donc $\boxed{A = P.\Delta.{}^tQ}$

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reconnaître la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. En déduire $E(\lfloor X \rfloor)$ et $V(\lfloor X \rfloor)$.

Classique, quasi du cours !
$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor + 1 = k) = P(\lfloor X \rfloor = k-1) = P(k-1 \leq X < k) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) = (1 - e^{-\lambda.k) - (1 - e^{-\lambda.(k-1)}} = e^{\lambda.(k-1)}.(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$. On en déduit aisément l'espérance et la variance de $\lfloor X \rfloor$.