$\boxed{\textbf{Planche Oral Probas 4 - HEC 2024}}$

Exercice principal

Cet exercice traite de certains liens entre une variable aléatoire et des transformations affines de celle-ci et est composé de questions en grande partie indépendantes. Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans la suite c désigne un réel non nul et a un réel non-nul différent de 1 et de -1 .

1. Question de cours : Théorème central limite.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Donner un exemple de variable aléatoire X quasi-certaine telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

   (b) Donner un exemple de variable aléatoire X bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

   (c) Donner un exemple de variable aléatoire X non-bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

   (d) Donner un exemple de variable aléatoire X n'admettant pas d'espérance telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

3. On se propose de montrer dans cette question qu'il n'existe pas de variable aléatoire X telle que X et $c + X$ suivent la même loi.
   On suppose par l'absurde qu'une telle variable aléatoire X existe et on note F sa fonction de répartition.

   (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel t, l'égalité : $F(t) = F(t - nc)$.

   (b) En déduire une contradiction et conclure.

4. On suppose dans cette question qu'il existe une variable aléatoire X qui suit la même loi que la variable aléatoire $aX + c$. On pose $\alpha = \frac{c}{1-a}$ et $Y = X - \alpha$.

   (a) Etablir que les variables aléatoire Y et aY suivent la même loi.

   (b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $P(|Y| \geqslant t) = 0$.

   (c) Que peut-on en déduire?

5. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X est telle que, pour tout entier n non nul et tout n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X, il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi. Etablir que si X admet une variance non nulle alors X suit une loi normale.

Question sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Question sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Question sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Question sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Question sans préparation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.