Planche Oral Probas 3 - ESCP 2014 - Exercice 3.11

Exercice principal

1. Cours.

2. (a) $X = \frac{c}{2}$ convient.

   (b) Toute v.a. de densité symétrique par rapport à $\frac{c}{2}$ convient. Ainsi, par exemple, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,c])$ convient.

   (c) $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{c}{2}, 1\right)$ convient par exemple.

   (d) En translatant la loi de Cauchy : X ayant pour densité $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}$ convient

3. (a) Pour tout réel t on a :

$$F(t) = P(X \leqslant t) = P(c + X \leqslant t) = P(X \leqslant t - c) = F(t-c)$$

   et ainsi, par un raisonnement par récurrence sor $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = F(t - nc)$$

   (b) En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient (du fait que $c \neq 0$) :

$$F = 0 \text{ si } c > 0$$
$$F = 1 \text{ si } c < 0$$

   Dans le deux cas F n'est pas une fonction de répartition et donc :

$$\text{il n'existe pas de v.a. } X \text{ telle que } X \stackrel{loi}{\to} c + X.$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= P(X - \alpha \leq x) \\
&= P(X \leq x + \alpha) = P(aX + c \leq x + \alpha) \text{ par hypothèse} \\
&= P(a(X - \alpha) + \alpha.a + x \leq x + \alpha) \\
&= P(aY + \alpha.a + c - \alpha \leq x) \\
&= P(aY \leq x) \text{ car } \alpha.a + c - \alpha = 0
\end{aligned}$$

   Bilan : $\boxed{Y \stackrel{loi}{\to} aY}$

   (b) Soit $t > 0$. On a :

$$P(|Y| \geqslant t) = P(|aY| \geqslant t) = P\left(|Y| \geqslant \frac{t}{|a|}\right)$$

   et par un raisonnement par recurrence sur l'entier m :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad P(|Y| \geqslant t) = P\left(|Y| \geqslant \frac{t}{|a|^n}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on $-\infty$ selon la position de $|a|$ par rapport à 1 on obtient :

$$\forall t > 0 \quad P(|Y| \geqslant t) = 0$$

(c) On en deduit que $Y = 0$ p.s et donc :

$$\text{si } X \overset{loi}{\to} aX + c \text{ alors } X = \frac{c}{1-a} p.s.$$

5. Posons $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. On a alors :

$$\begin{array}{l} E\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = E\left(a_n X + b_n\right) \Leftrightarrow nm = a_n m + b_n. \\ V\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = V\left(a_n X + b_n\right) \Leftrightarrow n\sigma^2 = a_n^2 \sigma^2. \end{array}$$

D'où nécessairement : $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = (n - \sqrt{n})m$.
Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ suit la même loi que } \frac{X - m}{\sigma}$$

D'après le théorème central limite on a donc :

$$\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

D'où en conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$$

Question sans préparation

On commence par remarquer que si (v_i) est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $(v_i{}^t v_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est clair pour la base canonique (e_i) et pour une base quelconque, on a $v_i{}^t v_j = P e_i{}^t e_j{}^t P$ où P est la matrice de passage, en notant que $M \to PM^tP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si on considère une base de vecteurs propres (v_i) de A alors ($v_i{}^t v_j$) est une base de vecteurs propres de ϕ_A.