

Planche Oral Analyse 6 : ESCP

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0, 1]$.

(a) Montrer que, $\forall t > 0$, $(f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} \leq \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)$.

(b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} dt \leq 1$$

2. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et $\lambda \in [0, 1]$.

En utilisant la question précédente, montrer que:

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} dt \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)dt \right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} g(t)dt \right)^{1-\lambda}$$

3. On rappelle que: $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

On définit alors la fonction G sur $]0, +\infty[$ par $G : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Établir que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$ on a:

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (\Gamma(x))^\lambda (\Gamma(y))^{1-\lambda}$$

Que peut-on en déduire pour la fonction G ?

4. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y \geq 1$.

(a) Montrer que $G(x+1) \leq \left(1 - \frac{1}{y}\right) G(x) + \frac{1}{y} G(x+y)$.

(b) En déduire que $\Gamma(x+y) \geq x^y \Gamma(x)$.

5. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y \leq 1$. Montrer que:

$$\Gamma(x+y) \leq x^y \Gamma(x)$$

QUESTION SANS PREPARATION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [[1, 2n + 1]]$, soit A_k l'événement : "le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n + 1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers".

1. Calculer $P(A_k)$, pour $k \in [[1, 2n + 1]]$.
2. En déduire que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

QUESTION SANS PREPARATION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [[1, 2n + 1]]$, soit A_k l'événement : "le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n + 1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers".

1. Calculer $P(A_k)$, pour $k \in [[1, 2n + 1]]$.
2. En déduire que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

QUESTION SANS PREPARATION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [[1, 2n + 1]]$, soit A_k l'événement : "le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n + 1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers".

1. Calculer $P(A_k)$, pour $k \in [[1, 2n + 1]]$.
2. En déduire que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.