

Corrigé Planche Oral Analyse 6

1. (a) Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\forall (x, y) \in]0; +\infty[$, $\ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1 - \lambda) \ln(y)$ par concavité du $\ln$. En posant $x = f(t)$ et $y = g(t)$, les fonctions étant à valeurs strictement positives sur $]0; +\infty[$, et en passant à l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.
- (b) D'après l'inégalité précédente, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t))dt$ étant convergente par linéarité, on a par comparaison que $\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} dt$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a : $\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} dt \leq \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t))dt = 1$ d'après les hypothèses.
2. Posons, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{f(t)}{\int_0^{+\infty} f(t)dt}$ (le dénominateur étant non nul car l'intégrale est strictement positive) et $\psi(t) = \frac{g(t)}{\int_0^{+\infty} g(t)dt}$. φ et ψ vérifient les hypothèses de la question précédente. D'où : $\int_0^{+\infty} (\varphi(t))^\lambda (\psi(t))^{1-\lambda} dt$ converge et est inférieure ou égale à 1, d'où la conclusion par linéarité.
3. (a) $\forall x > 0$, $\Gamma(x) > 0$ par stricte positivité (à justifier avec le programme).
- (b) $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda x + (1 - \lambda)y - 1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (t^{x-1} e^{-t})^\lambda (t^{y-1} e^{-t})^{1-\lambda} dt$, ce qui est inférieur d'après la question 2 à $\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$. On en déduit que Γ est convexe.
4. (a) $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $(x + y) = (1 - \frac{1}{y})x + \frac{1}{y}(x + y)$, d'où le résultat par convexité.
- (b) $\forall x \in]0, +\infty[$, $G(x + 1) = G(x) + \ln(x)$, d'où, par la question précédente, $\frac{1}{y}G(x + y) \geq \ln(x) + \frac{1}{y}G(x)$, c'est à dire $G(x + y) \geq y \ln(x) + G(x)$. En prenant l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.
5. $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $(x + y) = \lambda x + (1 - \lambda)(x + 1)$ ($x + y \in [x, x + 1]$) avec $\lambda = 1 - y \in [0, 1]$. D'où : $G(x + y) \leq (1 - y)G(x) + yG(x + 1) \leq (1 - y)G(x) + yG(x) + y \ln(x) \leq G(x) + y \ln(x)$, d'où le résultat.

QUESTION SANS PREPARATION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [[1, 2n + 1]]$, soit A_k l'événement : "le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n + 1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers".

1. L'événement A_k est réalisé ssi le lancer numéro k donne Pile et les $k - 1$ premiers lancers donnent exactement n Pile. Notons X_{k-1} la variable aléatoire égale au nombre de Pile

obtenus lors des $k - 1$ premiers lancers. Alors X_{k-1} suit la loi $\mathcal{B}(k - 1, 1/2)$. Puis

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P([X_{k-1} = n] \cap P_k) \\ &= P(X_{k-1} = n) \cdot P(P_k) \text{ par indépendance de lancers} \\ &= \binom{k-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \binom{k-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

(ce qui vaut 0 si $n > k - 1$).

2. La pièce étant équilibrée, la probabilité pour que le nombre de Pile obtenu au bout des $2n + 1$ lancers soit supérieur ou égal à $n + 1$ est égale à $\frac{1}{2}$ (car proba de nombre de Pile $i = n + 1$ est la même que proba de nombre de Face $i = n + 1$). Notons A l'événement correspondant. Alors $A = \cup_{k=n+1}^{2n+1} A_k$, cette union étant disjointe. On en déduit bien que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$$