

Planche Oral Algèbre 6 - ESCP 2023 - Ex.1.6
--

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace vectoriel de F des fonctions polynomiales et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

On considère l'endomorphisme $D : f \mapsto D(f)$ de F , où la fonction $D(f)$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x).$$

1. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par D .

On note alors Δ_n l'endomorphisme de E_n induit par D .

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le noyau et l'image de Δ_n .
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ_n .
L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable?
- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que pour tout $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta_n(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
- (d) Expliciter P lorsque $Q(x) = x^2$.

Utiliser P pour retrouver la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit $\phi :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $g \in F$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in F$ telle que $D(f) = g$ et $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) = \phi(x)$.
- (b) L'endomorphisme D est-il surjectif?
- (c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in F$, différente de la fonction nulle, telle que $D(f) = \lambda f$.

Question sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$$

Question sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$$

Question sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$$

Question sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$$