Corrigé Planche Oral Algèbre 6 - ESCP 2023 - Ex.1.6

1. (a) On a $\forall\, n\,,\ P \in E_n \Rightarrow D(P) = P(x+1) - P(x) \in E_n\,.$

   (b) L'espace $Im(\Delta_n)$ est engendré par les polynômes $(\Delta_n(x^j))_{0\leq j\leq n}$ qui valent :

$$\Delta_n(x^0) = 0 \ \text{ et } \ \forall\, j \in [\![1,n]\!]\,, \quad \Delta_n(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i \in E_{n-1}$$

   La famille $(\Delta_n(x^j))_{1\leq j\leq n}$ est de degrés croissants, donc libre, donc c'est une base de $Im(\Delta_n)$ qui est donc de dimension n. Ainsi, par égalité des dimensions, on a $\boxed{Im(\Delta_n) = E_{n-1}.}$

   De plus on a clairement $E_0 \subset Ker(\Delta_n)$. Et par le théorème du rang $\dim(Ker(\Delta_n) = 1$.

   D'où, par égalité des dimensions, on a : $\boxed{Ker(\Delta_n) = E_0.}$

   Autre idée : utiliser la matrice de Δ_n dans la base $(x^j)_{0\leq j\leq n}$.

   (c) La matrice A de Δ_n dans la base canonique de E_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc 0 est l'unique valeur propre et E_0 l'espace propre associé; A est non diagonalisable.

   (d) On a $Q \in E_{n-1} = Im(\Delta_n) \Rightarrow \exists P \in E_n\,,\ \Delta_n(P) = Q\,$; alors $P_1(x) = P(x) - P(0)$ convient, puisque Δ_n est nul sur E_0.

   Si P_2 est une (autre) solution, alors $P_2 - P_1 \in Ker(\Delta_n) = E_0$, donc P_1 et P_2 diffèrent d'une constante, qui est nulle puisqu'ils ont même valeur en 0.

   (e) Le polynôme cherché $A(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 1 \\ 3a+2b & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1/3 \\ b & = & -1/2 \\ c & = & 1/6 \end{array}\right.$$

   d'où

$$A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)\,(2x-1)}{6}$$

   puis

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[A(k+1) - A(k)\Big] = A(n+1) - A(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

2. (a) Si f est solution, on a par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in \,]n, n+1]\ , \quad f(x) = \phi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} g(x-k)$$

   d'où au plus une solution, et on vérifie qu'elle convient.

   (b) D'après a), D est surjective.

(c) En prenant $\phi = 1$, on a par récurrence comme ci-dessus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in \,]n, n+1]\ , \quad f(x) = (\lambda+1)^n$$

qui vérifie bien

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x+1) = (\lambda+1)\, f(x) \quad \text{d'où} \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x) = \lambda\, f(x).$$

Question sans préparation

Par stabilité, $Y - X$ suit la loi normale d'espérance $E(Y - X) = \mu - m$ et de variance $V(X - Y) = 2\sigma^2$. Donc $Y - X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu - m, 2.\sigma^2)$. En passant par la variable centrée-réduite associée à $Y - X$:

$$P(Y - X \leq 0) = P(\frac{(Y-X) - (\mu - m)}{\sqrt{2}\sigma} \leq -\frac{\mu - m}{\sqrt{2}\sigma}) = \Phi(-\frac{\mu - m}{\sqrt{2}\sigma})$$

Donc

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Phi(-\frac{\mu - m}{\sqrt{2}\sigma}) \geq \Phi(0)$$

donc ssi $-\frac{\mu - m}{\sqrt{2}\sigma} \geq 0$, ssi $\mu \leq m$.

Bilan : $P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$ ssi $\mu \leq m$, ce qui est assez logique !!
Notons que si X et Y suivent la même loi alors $P(Y \geq X) = P(X \geq Y) = \frac{1}{2}$.