

Planche Oral Probas 2 - ESCP 2019 - Exercice 3.2

Exercice principal

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune "pile" avec la probabilité p . On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois;
- aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné "pile" aux manches précédentes;
- on s'arrête quand toutes les pièces ont donné "pile"

Pour tout $k \in [[1, R]]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la k -ième pièce. On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k , son espérance et sa variance.
2. Ecrire un programme Python qui simule Y .
3. Déterminer la loi de Y .
4. Montrer la convergence de la série $\sum_n P(Y > n)$.
On admet alors que Y admet une espérance et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$.
5. Soit la fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - (1 - q^x)^R$.
Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$$

6. Etablir l'encadrement :

$$-\frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1} \leq E(Y) \leq 1 - \frac{1}{\ln(q)} \sum_{k=0}^R \frac{1}{k+1}$$

En déduire un équivalent de $E(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration que $\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$ est équivalent à $\ln(R)$ lorsque R tend vers $+\infty$

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

Question sans préparation

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.