Corrigé Planche Oral Probas - ESCP 2019 - Exercice 3.2

Exercice principal

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune "pile" avec la probabilité p. On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois;
- aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné "pile" aux manches précédentes;
- on s'arrête quand toutes les pièces ont donné "pile"

Pour tout $k \in [[1,R]]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la k-ième pièce.
On note Y le nombre de manches effectuées.

1. $X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $E(X_k) = \frac{1}{p}$ et $V(X_k) = \frac{1-p}{p^2}$.
2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y = Max(X_1, \cdots, X_R)$. D'où le programme :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
R=int(input("R="))
p=float(input("p="))
X=rd.geometric(p,[1,R])
Y=np.max(X)
print(Y)
```

3. De facon classique : par indépendance, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(Y \leq n) = P(\cap_{k=1}^R [X_k \leq n]) = (P(X_1 \leq n))^r = (1-q^n)^R$$
D'où
$$P(Y = n) = (1-q^n)^R - (1-q^{n-1})^R$$
(encore vrai si $n = 1$)
4. Montrons la convergence de la série $\sum_n P(Y > n)$.
$$\begin{aligned} P(Y > n) &= 1 - (1-q^n)^R \\ &= -(e^{R\ln(1-q^n)} - 1) \end{aligned}$$
Comme $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(1-q^n) = 0$ d'où par équivalences classiques,
$$P(Y > n) \sim_{n\to+\infty} -R\ln(1-q^n) \sim_{n\to+\infty} R.q^n$$
Comme $|q| < 1$, la série $\sum_n Rq^n$ converge, donc par critère d'équivalence la série $\sum_n P(Y > n)$ converge.

On admet alors que Y admet une espérance et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$.
5. Soit la fonction $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - (1-q^x)^R$.

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
On montre comme ci-dessus que
$$f(x) \sim_{x\to+\infty} R.q^x = R.e^{x.\ln(q)}$$
Comme $\ln(q) < 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{x.\ln(q)}dx$ converge. Par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. On démarre ensuite de la formule classique
$$\frac{1-(1-q^x)^R}{1-(1-q^x)} = \sum_{k=0}^{R-1} (1-q^x)^k$$

d'où
$$f(x) = q^x.\sum_{k=0}^{R-1}(1-q^x)^k$$
En intégrant, sous réserve de convergence :
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{R-1}\int_0^{+\infty} q^x.(1-q^x)^k dx$$
Posons $u = q^x = e^{x\ln(q)}$. Ce changement de variables est autorisé car $x \mapsto e^{x\ln(q)}$ est C^1 strictement décroissante. De plus $du = \ln(q).q^x dx$ donc $dx = \frac{1}{\ln(q)}.\frac{1}{u}du$.
Par changement de variables, $\int_0^{+\infty} q^x.(1-q^x)^k dx$ est de même nature que
$$\int_1^0 u.(1-u)^k.\frac{1}{\ln(q)}.\frac{1}{u}du = -\frac{1}{\ln(q)}.\int_0^1 (1-u)^k du = -\frac{1}{\ln(q)}.\frac{1}{k+1}$$
Donc toutes les intégrales en jeu sont convergentes et
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{R-1}.\frac{1}{k+1}$$

6. Tout d'abord, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (de proche en proche en partant de $x \leq y$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt$, ce qui donne en sommant :
$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \geq \int_0^{+\infty} f(t)dt$$
Et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$, d'où :
$$E(Y) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} f(t)dt$$
d'où d'après ce qui précède,
$$-\frac{1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1} \leq E(Y) \leq 1 - \frac{1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{R}\frac{1}{k+1}$$
Enfin, comme d'après l'indication $\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1} \sim_{R\to+\infty} \ln(R)$ (équivalent classique sur la somme partielle de la série harmonique), on en déduit aisément que $E(Y) \sim_{R\to+\infty} -\frac{1}{\ln(q)}.\ln(R)$.

Question sans préparation

Comme A est symétrique avec n valeurs propres distinctes, il existe une matrice $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de vp toutes distinctes et une matrice orthogonale P telles que $A = P.D.{}^tP$.
Comme de plus $AB = BA$, on montre de façon classique que A et B sont diagonalisables dans la même base.
Plus précisemment, si $X \neq 0$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $BAX = ABX$ donc $ABX = \lambda.BX$. Donc $BX \in Ker(A - \lambda.I)$. Comme ce sous-espace propre est de dimension 1, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \alpha X$, donc X est un vecteur propre de B.
Par conséquent, en notant $P = (X_1|...|X_n)$ la matrice orthogonale ci-dessus, $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vp de A, c'est donc aussi une BON formée de vp de B et $B = P.D'.{}^tP$ où $D' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n)$.
Comme de plus $A^5 = B^5$, on a $P.D^5.{}^tP = P.D'^5.{}^tP$ d'où $D^5 = D'^5$. Ainsi pour tout $i \in [[1,n]]$, $\lambda_i^5 = \lambda_i'^5$.
Comme la fonction $x \mapsto x^5$ est injective, on a $\lambda_i = \lambda'_i$ et $D = D'$.
D'où enfin $A = B$.