Corrigé Planche Oral Analyse 7 : ESCP 2017

1. (a) Déterminons les points critiques de f. On a $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$;

$$\partial_1(f)(x, y)=3x^2-3y \text{ et } \partial_2(f)(x, y)=3y^2-3x$$

Les points critiques sont donc tels que $\left\{\begin{array}{l} x^2=y \\ y^2=x \end{array}\right.$, ce qui donne $x^4=x$ et donc $x=0$ ou $x=1$.
On achève alors la résolution et les points critiques sont $O=(0,0)$ et $A=(1,1)$.
Ensuite :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x, y)=6x, \partial_{1,2}^2(f)(x, y)=-3, \partial_{2,2}^2(f)(x, y)=6y$$

d'où les matrices hessiennes:

- en $O, H_0=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 et -3 : on a donc un point col, i.e. pas d'extremum ;
- en $A, H_1=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=6I_2+H_0$, de valeurs propres 9 et 3 , donc strictement positives ; on a un minimum local, de valeur $f(1,1)=-2$.

(b) On a $f(x, 0)=x^3-1$ qui tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$; donc il n'y a pas de maximum ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Une droite passant par l'origine : soit a une équation du type $y=ax$, soit a pour équation $x=0$ (c'est l'axe des abscisses).

- $f(0, y)=y^3-1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;
- $f(x, 0)=x^3-1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;
- $f(x,-x)=3x^2-1$, qui présente un minimum global en 0 ;
- pour $\lambda \notin\{-1,0\}$, on a $f(x, \lambda x)=\left(1+\lambda^3\right) x^3-3\lambda x^2-1=h_\lambda(x)$, avec $h_\lambda^{\prime}(x)= 3\left(1+\lambda^3\right) x^2-6\lambda x$. Cette dérivée s'annule et change de signe en 0 , donc on a un extremum (local) en 0 .

2. La fonction $g_x: y \mapsto f(x, y)$ vérifie $g_x^{\prime}(y)=3\left(y^2-x\right)$;

- Si $x \leqslant 0$, on a : $\forall y \in \mathbb{R}^*, g_x^{\prime}(y)>0$; on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires strict et g_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $0<x<1/2$, On a alors :

y	$-\infty$		$-\sqrt{x}$		$\sqrt{x}$		$+\infty$
$g_x^{\prime}(y)$		+	0	-	0	+	
g_x	$-\infty$	$\nearrow$	<0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

En effet $g_x(-\sqrt{x})=2x^{3/2}+x^3-1<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8}-1<0$. Ainsi g_x s'annule encore une fois et une seule (et pour une valeur supérieure à $\sqrt{x}$).

3. On a $f(0, y)=0 \Longleftrightarrow y^3=1$ et $\varphi(0)=1$.
Ensuite on a pour tout $x \in J$, $g(x)=f(x, \varphi(x))=0$, donc

$$g^{\prime}(x)=0=\partial_1 f(x, \varphi(x))+\varphi^{\prime}(x).\partial_2 f(x, \varphi(x))$$

donc en particulier si $x=0$:

$$0=\partial_1(0,1)+\varphi^{\prime}(0).\partial_2(0,1)=-3+3\varphi^{\prime}(0)$$

donc $\varphi'(0) = 1$.

Comme φ est de classe C^∞, la substitution du développement limité de φ en 0 , de la forme:

$$\varphi(x) = a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \frac{d}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

dans $f(x, \varphi(x)) = 0$ donne

$$x^3 + \left[a + bx + \frac{c}{2}x^2 + \frac{d}{6}x^3\right]^3 - 3x\left[a + bx + \frac{c}{2}x^2\right] + o\left(x^3\right) - 1 = 0$$

Ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{cl} a^3 & = 1 \\ 3a^2b - 3a & = 0 \\ 3ab^2 - \frac{3}{2}a^2c - 3b & = 0 \\ 1 + b^3 + \frac{1}{2}a^2d - \frac{3}{2}c & = 0 \end{array}\right., \text{ d'où } : \left\{\begin{array}{lll} a & = 1 & = \varphi(0) \\ b & = 1 & = \varphi'(0) \\ c & = 0 & = \varphi''(0) \\ d & = -4 & = \varphi^{(3)}(0) \end{array}\right.$$

QUESTION SANS PREPARATION

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement : "la partie A possède k éléments". Alors $(A_k)_{k\in[[0,n]]}$ est un SCE et d'après la FPT :

$$P(A \cap B = \emptyset) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k \cap [A \cap B = \emptyset])$$

Comme il y. a 2^n parties de $[[1, n]]$, il y a $2^n \times 2^n = 4^n$ façons de choisir deux parties quelconques de E.
Pour choisir un couple de parties vérifiant $A_k \cap [A \cap B = \emptyset$:
- on choisit une partie A à k élements : il y a $\binom{n}{k}$ choix.
- puis on choisit une partie B parmi les $n - k$ éléments restants : il y a 2^{n-k} choix.
donc

$$P(A_k \cap [A \cap B = \emptyset]) = \binom{n}{k}.2^{n-k}/4^n$$

Enfin,

$$P(A \cap B = \emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.2^{n-k}/4^n = \frac{3^n}{4^n} = (\frac{3}{4})^n$$

Autre méthode : soit $i \in [[1, n]]$. i se trouve ou non dans la partie A de façon équiprobable (car il y a autant de parties qui contiennent i que de parties qui ne contiennent pas i), et se trouve ou non dans la partie B de façon équiprobable. A et B étant choisies indépendamment, i a donc une chance sur 4 de n'être pas dans $A \cap B$. Les études des entiers i étant indépendantes (pas clair) on a alors $P(A \cap B = \emptyset) = (\frac{3}{4})^n$.