Planche Oral Algèbre 5 -HEC 2022 - S244

Exercice principal

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

- On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si elle est semblable à la matrice $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée à partir des propres coefficients diagonaux de A .

Autrement dit, vérifiant :

$$\forall i \in [[1, n]], \quad d_{i,i} = a_{i,i} \text{ et } \forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } d_{i,j} = 0$$

- On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

1. Question de cours : propriétés de la trace.
2. On suppose dans cette question seulement que $n \geq 2$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non diagonale à diagonale propre.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Exprimer la trace de A^2 à l'aide des coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
 - (b) A quelle condition A est-elle à diagonale propre ?
4. (a) Que renvoie la fonction Python K suivante, si on rentre x un réel, n un entier naturel non nul et B une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

```
def K(x,n,B):  
    S=0  
    for i in range(0,n-1):  
        if x==B[i,i] :  
            S=S+1  
    return S
```

- (b) Compléter la fonction Python suivante, qui si on lui donne n un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie 1 si la matrice A est à diagonale propre et 0 sinon. On pourra utiliser la fonction K ainsi que la fonction `al.rank`

```
def Diagpropre(n,A):  
    C=1  
    I=np.eye(n)  
    for i in range(0,n-1):  
        .....  
        ...  
        ...  
    return C
```

5. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Déterminer le plus grand entier $p \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension p vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$.

Question sans préparation

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(Z = n)$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.
2. Montrer que si $X + Y$ suit une loi binômiale, alors X et Y suivent aussi des lois binômiales (pas forcément de même paramètre).

Question sans préparation

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(Z = n)$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.
2. Montrer que si $X + Y$ suit une loi binômiale, alors X et Y suivent aussi des lois binômiales (pas forcément de même paramètre).

Question sans préparation

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(Z = n)$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.
2. Montrer que si $X + Y$ suit une loi binômiale, alors X et Y suivent aussi des lois binômiales (pas forcément de même paramètre).