

Corrigé - Planche Oral Algèbre 5 -HEC 2022 - S244

Exercice principal

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

- On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si elle est semblable à la matrice $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée à partir des propres coefficients diagonaux de A .
Autrement dit, vérifiant :

$$\forall i \in [[1, n]], \quad d_{i,i} = a_{i,i} \text{ et } \forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } d_{i,j} = 0$$

- On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
- Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $Tr(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$, et vérifiant :
 $Tr(AB) = Tr(BA)$.
En particulier deux matrices semblables ont la même trace.
- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme M est triangulaire supérieure, $Tr(M) = \{1, 2\}$. Comme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et possède 2 valeurs propres distinctes, M est diagonalisable et semblable à $D = Diag(1, 2)$. Donc M est non diagonale à diagonale propre.
Exemple analogue en dimension $n \geq 2$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a)

$$Tr(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot a_{k,i} = \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k}^2$$

- (b) Comme A^2 est semblable à D^2 , $Tr(A^2) = Tr(D^2)$. Or $Tr(D^2) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$.
Ainsi :

$$\sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 \Leftrightarrow \forall (i, k) \in [[1, n]]^2, \quad i \neq k \Rightarrow a_{i,k} = 0$$

Donc A est à diagonale propre si et seulement si A est diagonale !!

4. (a) Que renvoie la fonction Python K suivante, si on rentre x un réel, n un entier naturel non nul et B une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

```
def K(x,n,B):  
    S=0  
    for k in range(0,n-1):  
        if x==B[i,i] :  
            S=S+1  
    return S
```

Ce programme compte le nombre de termes de la diagonale de B qui sont égaux à x .

- (b) Compléter la fonction Python suivante, qui si on lui donne n un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie 1 si la matrice A est à diagonale propre et 0 sinon. On pourra utiliser la fonction `K` ainsi que la fonction `al.rank`

```
def Diagpropre(n,A):
    C=1
    I=np.eye(n)
    for i in range(0,n-1):
        if n-al.rank(A-A[i,i]*I) != K(A[i,i],n,A):
            C=0
    return C
```

5. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Non (sauf si $n = 1$)!

Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non diagonalisable !

6. L'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n$ est inclus dans $\mathcal{E}_n$, et $\dim(\mathcal{D}_n) = n$.

Soit G le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices dont la diagonale est nulle. On remarque que $G \cap \mathcal{E}_n = \{0\}$. De plus $\dim(G) = n^2 - n$ (pas très dur à voir).

Soit F un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{E}_n$. Alors

$$F \cap G \subset \mathcal{E}_n \cap G = \{0\}$$

Donc F et G sont en somme directe. On en déduit que $F \oplus G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$\dim(F) + \dim(G) \leq n^2 \Rightarrow \dim(F) \leq n^2 - (n^2 - n) = n$$

Bilan : la dimension maximale pour un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{E}_n$ est n .

Question sans préparation

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(Z = n)$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(X + Y = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n t^n \cdot P(X = k) \cdot P(Y = n - k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n t^k P(X = k) \cdot t^{n-k} \cdot P(Y = k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} t^i \cdot P(X = i) \cdot t^j \cdot P(Y = j) \\ &= G_X(t) \cdot G_Y(t) \end{aligned}$$

Plutôt : Th. de transfert : $G_Z(t) = E(t^Z)$!!

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (pt + q)^n$$

On suppose donc qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que $Z = X + Y$ vérifie :

$$G_Z(t) = (pt + q)^n = G_X(t) \cdot G_Y(t)$$

La fonction G_Z est polynômiale, G_X et G_Y le sont aussi. Comme le polynôme G_X divise le polynôme G_Z , il est nécessairement de la forme $G_X(t) = \alpha \cdot (pt + q)^i$, auquel cas on a $G_Y(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot (pt + q)^{n-i}$. De plus $G_X(1) = 1$, donc $\alpha = 1$. Finalement, G_X et G_Y sont des fonctions génératrices de lois binômiales, donc suivent toutes deux une loi binômiale.