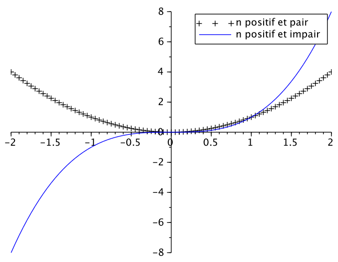
Chapitre 1 - Révisions d'analyse A : fonctions usuelles

I. Puissances entières et réciproques

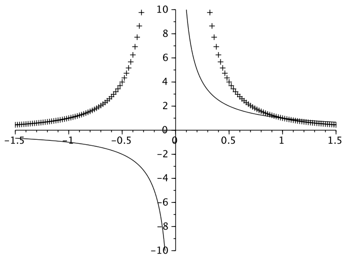
I.1) Puissances entières

On se propose de tracer les courbes représentatives des fonctions définies pour $n \in \mathbb{Z}^*$, par $f_n : x \mapsto x^n$.
On remarque que ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$, sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Elles ont la parité de n, si bien que l'on peut les étudier sur $[0; +\infty[$ si $n > 0$ ou $]0; +\infty[$ si $n < 0$.
Si $n > 0$, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f_n'(x) = nx^{n-1} \geq 0$, donc f_n est croissante sur $[0; +\infty[$.
Si $n < 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f_n'(x) = nx^{n-1} \leq 0$, donc f_n est décroissante sur $]0; +\infty[$.
Si $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. Si $n < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^n = +\infty$.

On obtient les courbes suivantes si n est positif :

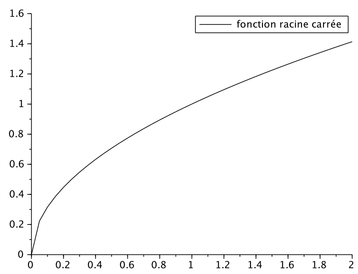


et les courbes suivantes si n est négatif :



I.2) Fonctions racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est une fonction strictement croissante et continue sur $[0; +\infty[$. Comme $f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$. On note alors $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sa bijection réciproque.



La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est une fonction continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$,
car réciproque d'une bijection continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On remarque que $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Enfin, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car bijection réciproque d'une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$, dont la dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour calculer sa dérivée, nous utiliserons les puissances fractionnaires. Le graphe de $\sqrt[n]{\cdot}$ s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice à partir du graphe de f_n.

II. Logarithme et exponentielle

II.1) Logarithme népérien

On remarque que, pour tout entier différent de -1, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ admet une primitive (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$), qui est, à un facteur multiplicatif près, une autre "fonction puissance" : $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Cependant, on ne peut plus écrire une telle égalité si $n = -1$, c'est-à-dire pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Mais cette fonction f_{-1} étant continue sur $\mathbb{R}^*$, elle admet des primitives sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$. Ces primitives ne s'expriment pas à partir des fonctions puissances.

Définition II.1
Logarithme népérien
On appelle **logarithme népérien**, et on note ln la primitive de f_{-1} sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Proposition II.1
Propriétés algébriques

1. $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\forall x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

Proposition II.2

1. La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
3. La fonction ln est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Savoir tracer la courbe de la fonction ln

Définition II.2
On note **e** le nombre tel que $\ln(e) = 1$.

Exercice 1
Inégalité fondamentale du $\ln$
A connaître par coeur et savoir redémontrer rapidement (HP)
Montrer que

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln(x) \leq x-1}$$

Plusieurs méthodes sont possibles : étude de fonction, concavité du ln...

Remarque
Variantes

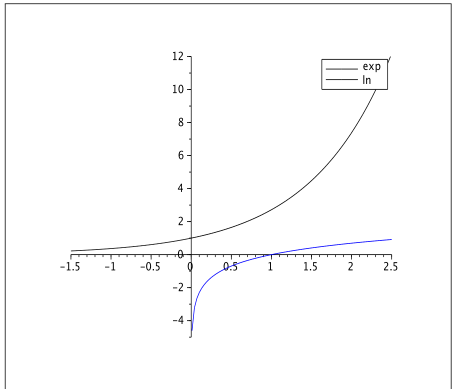
- Ceci implique que $\ln(x) \leq x$ pour tout $x > 0$.
- Par décalage : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$

II.2) Exponentielle

Définition II.3
La fonction exponentielle, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction ln.

Proposition II.3

1. La fonction exp est une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
4. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\exp' = \exp$.
5. $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.



Valeurs particulières : $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
$\ln(2) \simeq 0,69$.

Les graphes des fonctions ln et exp se déduisent l'un de l'autre par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Exercice 2
Inégalité fondamentale de l'exponentielle
Montrer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1+x}$$

Plusieurs méthodes sont possibles : étude de fonction, convexité, formule de Taylor...

Remarque
Ceci implique que $\exp(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III. Puissances réelles

On sait que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n\ln(x)) = \exp(\ln(x^n)) = x^n$. Ceci nous conduit à définir de façon analogue les puissances de x pour tout exposant réel α.

Définition III.1
Pour tout $x > 0$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Proposition III.1

1. $\forall x > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exp(\alpha x) = (\exp x)^\alpha$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$
4. Si $r = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $q > 0$, alors pour tout $x > 0$, $x^r = \sqrt[q]{x^p}$.

Remarque
Les restrictions à $]0;+\infty[$ des fonctions "puissances entières" et leurs réciproques $\sqrt[q]{\cdot}$ sont donc des cas particuliers des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$. En particulier pour dériver ces fonctions on dérivera des fonctions puissances.

Proposition III.2

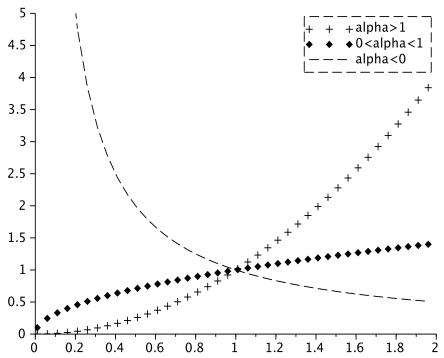
1. $\forall x > 0$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
2. $\forall x > 0$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$.
3. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

Proposition III.3
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Proposition III.4
dérivée
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. On remarque donc que cette dérivée est du signe de α.

Les limites de ces fonctions se déduisent des résultats sur les limites des fonctions exp et ln.

Graphiques : on a trois allures différentes :



IV. Fonctions circulaires

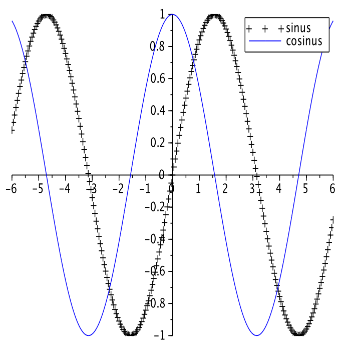
IV.1) Sinus, cosinus, tangente

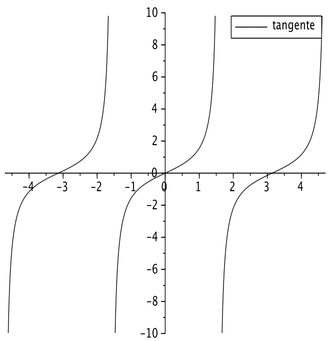
On rappele brièvement les principales propriétés de ces fonctions.

Proposition IV.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Graphes :





Proposition IV.2
définitions, périodicité
sin et cos sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles sont 2π-périodiques. sin est impaire et cos est paire. tan est définie sur la réunion $\cup_{k\in\mathbb{Z}}] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun de ses intervalles de définition. Elle est π-périodique et impaire.

Proposition IV.3
dérivées
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$ et $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$

Comme sin et cos prennent des valeurs strictement positives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, on en conclut que sin est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et cos est strictement décroissante sur ce même intervalle.

Pour tout x dans son domaine de définition, $\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$

D'où la stricte croissance de tan **sur chacun de ses intervalles de définition**.

IV.2) Formules de trigonométrie

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$	$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$	$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)
\end{aligned}$$

Formules de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

Pour la tangente : lorsque cela est défini,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]\\
\sin(a)\sin(b) &= \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]\\
\sin(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]
\end{aligned}$$

V. Arctangente

Définition V.1
La fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$:

$$\begin{array}{ccc}]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque s'appelle la fonction Arctan (fonction arctangente).

Proposition V.1

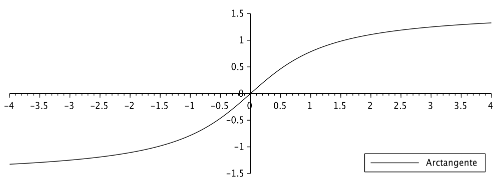
1. La fonction Arctan est strictement croissante, continue, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
   De plus $\lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.
   Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
Arctan(x)	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

2. La fonction *Arctan* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ Arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

3. Quelques valeurs particulières : $Arctan(0) = 0$, $Arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $Arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Courbe de la fonction arctangente :



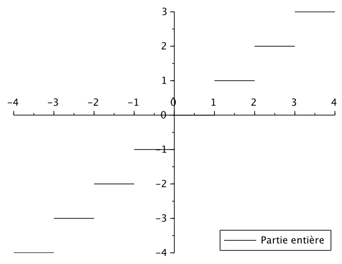
Exercice 3
Le classique sur la fonction Arctan **à savoir dérouler**
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x})$.
Montrer que g est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Vous préciserez les constantes.

VI. Partie entière

Définition VI.1
Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$. On définit alors la fonction partie entière

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \end{array}$$

Courbe de la fonction partie entière :



Exercice 4
Un classique
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

VII. Formules générales de dérivation

Théorème VII.1
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de R, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables sur I, alors $\lambda f + g$ est dérivable et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

Théorème VII.2
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de R.

1. $u\times v$ est dérivable sur I et $(u\times v)' = u'\times v + u\times v'$.
2. Si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Théorème VII.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, g une fonction dérivable sur un intervalle J, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Théorème VII.4
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f est dérivable sur I et si $\underline{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

VIII. Dérivation des fonctions usuelles

fonction f	Def(f)	Def(f')	$f'(x)$
f constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $f(x) = x^\alpha$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = x^\alpha$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$	idem	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Si f et g sont deux fonctions dérivables que l'on peut composer alors

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

En notant u une fonction on a alors les dérivées suivantes (sur les ensembles où les fonctions sont bien dérivables...) :

f	f'
u^α	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

f	f'
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

f	f'
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\tan(u)$	$u'(1 + \tan^2(u))$
$Arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$

IX. Croissances comparées

Théorème IX.1
limites en $+\infty$
Pour tout $(a, b, c) \in]0; +\infty[$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{cx}} = 0}$$

On dit que "la puissance l'emporte sur le logarithme" et que "l'exponentielle l'emporte sur la puissance".

Théorème IX.2
limites en 0
Pour tout $(a, b) \in]0; +\infty[$,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^a(\lvert \ln(x) \rvert)^b = 0}$$