
Mathématiques - Devoir de vacances été 2025

Saint Just - ECG2 Maths Approfondies

Exercice 1 : matrices antisymétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *antisymétrique* lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe:

$$f(M) = ({}^tA)M + MA.$$

- (a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
- (b) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4.
 - (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$ puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
 - (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
 - (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ et donner une base de $\text{Ker}(f)$.
5. Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.
6. Écrire F sous la forme $F = D + N$ où D est diagonale et N vérifie que N^2 est la matrice nulle.
7. En déduire F^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Que vaut alors $f^k(J)$?

Exercice 2 : probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in [[1, n]]$. Calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}$ la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$. On distinguera deux cas: $0 \leq i \leq k$ et $i > k$.
3. On suppose que l'on a déjà importé: `import numpy.random as rd`
Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y :

```
n=int(input("Entrer la valeur de n:"))
p=int(input("Entrer la valeur de p:"))
X=.....
Y=.....
```

4. (a) Justifier que $Y(\Omega) = [[0, n]]$ puis montrer que

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- (b) Écrire, pour tout $i \in [[1, n]]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

5. (a) Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$.

$$\text{Montrer l'égalité } i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

- (b) Établir que l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

6. (a) Établir que

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$$

- (b) Montrer que l'on a

$$\forall n \geq 2, \quad E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}.$$

- (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 3 : polynômes de Newton, application Δ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On considère la famille de polynômes $(N_k)_{k \in [[0, n]]}$ définie par :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [[1, n]], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad N_k(x) = x(x-1) \cdots (x-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (x-i)$$

On considère également l'application Δ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

où $P(x+1)$ désigne l'évaluation du polynôme P en $x+1$. Par exemple si $P(x) = x^2 - 3x$ alors

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x) = [(x+1)^2 - 3(x+1)] - [x^2 - 3x].$$

1. Écrire une fonction Python intitulée `def N(k,x)` : qui renvoie la valeur de $N_k(x)$.
2. Soit $k \in [[0, n]]$ et P_k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k(x) = x^k$. Calculer $\Delta(P_k)$.
3. Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de E .
5. Calculer $\Delta(N_0)$ puis pour tout $k \in [[1, n]]$, montrer que $\Delta(N_k) = kN_{k-1}$.
6. (a) Donner la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta)$.
(b) Δ est-elle bijective ?
(c) Déterminer le rang de Δ . Que vaut $\text{Im}(\Delta)$?
(d) En déduire alors la dimension de $\text{Ker}(\Delta)$ puis en déduire $\text{Ker}(\Delta)$.
7. (a) Rappel : on note $\Delta^0 = \text{Id}_E$ et si $j \geq 1$, $\Delta^j = \Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (j fois).

Soit $k \in [[0, n]]$ et $j \in [[0, k]]$. Que vaut $\Delta^j(N_k)$?

(b) Pour tout $k \in [[0, n]]$ et tout $j \in [[0, n]]$, justifier que $\Delta^j(N_k)(0) = \begin{cases} k! & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

8. Soit $P \in E$. Justifier qu'il existe des réels $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_n N_n.$$

Pour tout $j \in [[0, n]]$, exprimer les coefficients a_j en fonction de $\Delta^j(P)(0)$.

Problème : intégrales, séries

On rappelle que pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales suivantes:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1 .
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
(b) En déduire I_2 .

(c) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle permette le calcul de I_n .

```
def I(n):
    a=1/2
    b=np.log(2)-1/2
    for k in range(2,n+1):
        aux=a
        a=.....
        b=.....
    return .....
```

4. (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
5. (a) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.
 (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
6. (a) Calculer J_0 puis exprimer pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .
 (b) En déduire la valeur de J_1 .
7. Établir que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
8. (a) Justifier que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et préciser la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
 (b) Utiliser la question 5a pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
 (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
 (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2^n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
10. On se propose, malgré l'impasse de la question précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.
 (b) En déduire l'égalité suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

 (c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$.
 (d) Conclure.
11. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer:
 (a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$;
 (b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$;
 (c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$.