

Chapitre 1 - Révisions d'analyse B : polynômes

I. Généralités, espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$

Définition I.1

On appelle **polynôme** toute fonction de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Les nombres a_k sont appelés les coefficients du polynôme P .

On dit que deux polynômes sont égaux lorsque leurs coefficients sont égaux. Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes.

Remarque

La notation de l'ancien programme est $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ où X est une indéterminée. Cette notation est bien meilleure d'un point de vue théorique... Nous l'utiliserons de temps en temps et vous la trouverez dans les annales...

Définition I.2

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non nul. Le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$ est appelé **degré** de P .

On le note $\deg(P)$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$, avec $a_n \neq 0$, alors P est de degré n , le coefficient a_n s'appelle **coefficient dominant** de P et a_nx^n est le monôme de plus haut degré de P .

Si le coefficient dominant a_n est égal à 1, on dit que P est **unitaire**.

Par convention, si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.

Définition I.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

La somme, le produit de deux polynômes est encore un polynôme.

Proposition I.1

1. $\mathbb{R}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $(\text{App}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$. Il est de dimension infinie.
2. $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$, il a pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Autrement dit, si l'on note

$$\forall k \in [[0, n]], \quad f_k : x \mapsto x^k$$

alors $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Définition I.4

Polynôme pair, polynôme impair

On dit qu'un polynôme P est pair si c'est une fonction paire : $\forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = P(x)$.

De même P est impair si $\forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x)$.

Remarque

Soit $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$.

Le polynôme P est pair si et seulement si pour tout i , $a_{2i+1} = 0$, autrement dit si P est somme de monômes de degrés pairs.

Le polynôme P est impair si et seulement si pour tout i , $a_{2i} = 0$, autrement dit si P est somme de monômes de degrés impairs.

Proposition I.2

Propriétés du degré

1. $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ (ne pas en abuser).

Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.

Proposition I.3

Soit P et Q deux polynômes. Alors $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

II. Division euclidienne

Théorème II.1

Soit A et B deux polynômes, avec B non nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

On dit alors que l'on a effectué la division euclidienne de A par B . Q est le quotient et R est le reste de la division.

Définition II.1

Soit A et B deux polynômes, avec B non nul. On dit que B divise A , ou que A est un multiple de B , lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.

Remarque

B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Définition II.2

Soit A un polynôme non nul et non constant. A est dit **irréductible** lorsque les seuls polynômes qui divisent A sont les polynômes constants et les polynômes de la forme $B = \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Remarque

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$ (hors-programme).

III. Dérivation dans $\mathbb{R}[x]$. Formule de Taylor dans $\mathbb{R}[x]$

La dérivation $D : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de l'ev $\mathbb{R}[x]$.

Théorème III.1**Formule de Leibniz**

Soit P et Q deux polynômes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$$

Proposition III.1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. Notons $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^k$.

- Premier cas : si $j > k$ alors $P^{(j)} = 0$.
- Deuxième cas : si $j \leq k$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, P^{(j)}(x) = \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}$$

2. Si $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ où $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ alors par linéarité :

- Premier cas : si $j > n$ alors $Q^{(j)} = 0$.
- Deuxième cas : si $j \leq n$ alors $Q^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n a_k \cdot \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}$.

Théorème III.2**Formule de Taylor pour les polynômes**

Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et si a est un réel fixé, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Remarque

Cette formule donne la décomposition du polynôme P dans la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV. Racines**Définition IV.1**

Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition IV.1

Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.

α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha).Q(x)$

Proposition IV.2

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes alors il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_n).Q(x)$.

Théorème IV.1

Soit P un polynôme non nul de degré n . Alors P admet au plus n racines distinctes.

Théorème IV.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet $n+1$ racines distinctes alors $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$. Si P et Q coïncident en $n+1$ valeurs distinctes alors $P = Q$.
3. Si P est un polynôme qui admet une infinité de racines distinctes, alors $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
4. Si deux polynômes P et Q coïncident sur une infinité de valeurs, alors $P = Q$.
Autrement dit, s'il existe un ensemble A de cardinal infini tel que pour tout $a \in A$, $P(a) = Q(a)$, alors $P = Q$.

Définition IV.2**Racines multiples**

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)^p Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Remarque

Si $p = 1$, on dit que α est une racine simple de P . Si $p = 2$, il s'agit d'une racine double. Si $p \geq 2$, on dit que α est une racine multiple de P .

Théorème IV.3**Caractérisation des racines d'ordre k**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n , soit $k \in [[1, n]]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

α est une racine d'ordre k de P si et seulement si

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Exercice 1

On souhaite factoriser le polynôme $P = X^4 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P admet deux racines évidentes.
2. En déduire la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles.