

# Chapitre 1 - Révisions d'analyse C : théorèmes classiques

## I. Limites

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

### Théorème I.1

#### Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Soit  $f, g, h$  trois fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définies au voisinage de  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , telles que au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ .

### Théorème I.2

#### Théorème d'encadrement bis - à bien maîtriser

Soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $l \in \mathbb{R}$ . Si pour  $x$  voisin de  $x_0$ ,

$$|f(x) - l| \leq g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

### Théorème I.3

#### Passage à la limite dans une inégalité large

Soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) \leq g(x), \text{ si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$$

alors  $l \leq l'$ .

### Théorème I.4

#### Théorème de limite monotone

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et monotone sur un intervalle  $I = ]a; b[$  où  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

##### 1. 1er cas : si $f$ est croissante sur $I$ alors

- $f$  admet en tout  $x_0 \in ]a, b[$  une limite à droite finie et une limite à gauche finie et

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

- si  $f$  est majorée alors  $f$  admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow b^-$ .  
Si  $f$  n'est pas majorée alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .

- si  $f$  est minorée sur  $]a, b[$  alors  $f$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow a^+$ .  
Si  $f$  n'est pas minorée alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

**2ème cas : si  $f$  est décroissante sur  $I$  : on adapte !!!**

## II. Continuité

### Théorème II.1

#### Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ .

Si

la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ ,

alors

pour tout réel  $k$  intermédiaire  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

### Théorème II.2

#### Image d'un intervalle

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

### Théorème II.3

#### Image d'un segment par une fonction continue

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Alors  $f([a, b]) = [m, M]$  où  $m = \min_{[a, b]}(f)$  et  $M = \max_{[a, b]}(f)$ .

Toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$  admet un minimum  $m$  et un maximum  $M$ .

### Remarque

Utile en calcul intégral.

### Théorème II.4

#### Théorème de la bijection

Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ . Sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est elle-même continue et a le même sens de variation que  $f$ .

### Remarque

Un des théorèmes les plus utiles !!

### III. Dérivation

#### Définition III.1

##### Version 1

$f$  est **dérivable en**  $x_0$  si la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  possède une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$**  et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

##### Version 2

$f$  est **dérivable en**  $x_0$  si la fonction  $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  possède une limite finie quand  $h$  tend vers 0. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$**  et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

#### Théorème III.1

##### Dérivée de la bijection réciproque en un point

Soit  $f$  une fonction bijective d'un intervalle  $I$  dans un intervalle  $J$ , et  $f^{-1} : J \rightarrow I$  sa bijection réciproque. Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et si  $f'(x_0) \neq 0$ , la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

#### Théorème III.2

##### Dérivée de la bijection réciproque sur un intervalle

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective et  $f^{-1} : J \rightarrow I$  sa bijection réciproque. Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

#### Théorème III.3

##### Nombre dérivé en un extrema

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $x_0$  un point de  $I$  qui n'est pas une borne de  $I$ . Si  $f$  possède un extremum local en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .

#### Théorème III.4

##### Théorème de Rolle

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si :

1.  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
2.  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
3.  $f(a) = f(b)$

alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### Théorème III.5

##### Egalité des accroissements finis

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si :

1.  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
2.  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,

alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

#### Théorème III.6

##### Inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Si :

1.  $f$  est dérivable sur  $I$ ,
2. il existe un réel  $k \geq 0$  fixé tel que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq k$ ,

alors pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$

#### Autre version (plus au programme) :

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si :

1.  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
2.  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
3. il existe  $(m, M) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ ,

alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

#### Théorème III.7

##### Théorème de prolongement de la dérivée

Soit  $I$  un intervalle et  $a \in I$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ , continue en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f'(a) = l$ .

## IV. Convexité

### Définition IV.1

Soit  $f$  une application définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est **convexe** sur  $I$  si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1]^2,$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

On dit que  $f$  est **concave** sur  $I$  si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1]^2,$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

### Remarque

Si  $f$  est convexe, alors  $f$  est en-dessous de ses cordes.

Si  $f$  est concave, alors  $f$  est au-dessus de ses cordes.

### Remarque

$f$  est concave si et seulement si  $-f$  est convexe.

### Théorème IV.1

#### Inégalité de Jensen - ou de convexité généralisée

Si  $f$  est une fonction convexe sur un intervalle  $I$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ , pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ ,

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

### Théorème IV.2

**Cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  :**  $f$  est convexe sur  $I$  ssi  $f'' \geq 0$  sur  $I$ .

$f$  est concave sur  $I$  ssi  $f'' \leq 0$  sur  $I$ .

### Proposition IV.1

Si  $f$  est convexe alors  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes.

Si  $f$  est concave alors  $\mathcal{C}_f$  est en-dessous de ses tangentes.

### Exercice 1

#### Inégalités classiques de convexité :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq 1 + x$ .
2. Pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ . *Variante* : pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$ .
3. Pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ .
4. Pour tout  $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$ ,  $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(y)$ .
5. A l'aide de la concavité de la fonction  $\ln$ , montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in ]0; +\infty[^n, \quad \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n}$$

Cette inégalité est appelée *inégalité arithmético-géométrique*.

### Définition IV.2

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I)$  et  $a \in I$ . On dit que  $A(a, f(a))$  est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$  si  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$ .

### Remarque

En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

## V. Equivalents classiques

Au voisinage de 0,

$$\begin{array}{lll} \ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x & e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x & \sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x \\ 1 - \cos(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} & \tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x & (1+x)^\alpha - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \alpha x \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}^* \end{array}$$

On a également  $\boxed{\ln(x) \sim_{x \rightarrow 1} x - 1}$

Soit  $P$  un polynôme,  $P(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_q x^q$  où  $p < q$ ,  $a_p \neq 0$  et  $a_q \neq 0$ .

Alors :  $\boxed{P(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} a_q x^q, P(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p}$

## VI. Négligeabilité classique

$\boxed{\text{En } +\infty}$  : pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,

$$\begin{array}{ll} \ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x) & (|\ln(x)|)^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha) \\ x = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x) & x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x}) \end{array}$$

Si  $\alpha > \beta > 0$ ,  $\boxed{x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)}$

$\boxed{\text{En } 0}$  : pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,

$$\ln(x) = o_{x \rightarrow 0}(\frac{1}{x}) \quad |\ln(x)|^\beta = o_{x \rightarrow 0}(\frac{1}{x^\alpha})$$

Si  $\alpha > \beta > 0$ ,  $\boxed{x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta)}$

## VII. Suites réelles

Voir le cours de 1ère année.

### VII.1 ) Suites usuelles

Suites arithmétiques, géométriques, AG (arithmético-géométriques), SRL2 (récurrentes linéaires d'ordre 2).

### VII.2 ) Limites

Définition avec les epsilon. Théorèmes classiques : encadrement, entraînement, passage à la limite, composition...

#### **Théorème VII.1**

**Suites extraites des termes pairs et impairs (au programme).**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $l$  si et seulement si les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont toutes deux pour limite  $l$ .

### VII.3 ) Equivalents, petit "o"

Définitions et formules à connaître dans le cadre des suites...

### VII.4 ) Exercices classiques

Cf cours 1ère année : suites implicites, suites récurrentes, du type  $u_{n+1} = f(u_n)$  etc...