

Chapitre 1 - Révisions d'analyse D : Dérivées n -ièmes

I. Définitions

Définition I.1

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ($n \in \mathbb{N}^*$) si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .
En particulier, $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I ; $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f possède une dérivée d'ordre n , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I . On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Remarque

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$.

II. Dérivées de référence

Théorème II.1

- Les fonctions polynômes, fonctions rationnelles, $\ln$, $\exp$, $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\arctan$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- (a) Soit P un polynôme avec $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Alors $P^{(n+1)} = 0$, et donc pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ où $P(x) = x^n$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^\alpha$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1) x^{\alpha-k}$$

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{x^{k+1}}$$

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$.

- A l'aide du 4) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^k}$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

ou aussi : pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cos^{(2i)}(x) = (-1)^i \cdot \cos(x) \\ \cos^{(2i+1)}(x) = (-1)^{i+1} \cdot \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin^{(2i)}(x) = (-1)^i \cdot \sin(x) \\ \sin^{(2i+1)}(x) = (-1)^i \cdot \cos(x) \end{cases}$$

III. Formules générales

Théorème III.1

Combinaison linéaire, produit, quotient

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I , et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.
- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I , alors leur produit $f \times g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I .

Formule de Leibniz :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I , et si g ne s'annule pas sur I , alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I .

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{-x}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée n -ième, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème III.2

Composition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et si g est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J , alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I .

Rédaction-type :

Récurrences sur k , avec une hypothèse du type $\mathcal{H}(k) : "\forall x \in I, f^{(k)}(x) = \dots"$.

Attention : ne pas fixer x avant l'hypothèse de récurrence.