

Chapitre 1 - Révisions d'analyse F : séries

I. Vocabulaire et généralités

Définition I.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Etudier la série de terme général u_k , où $k \in \mathbb{N}$ (notation $\sum_{k \geq 0} u_k$), c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
2. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

Ce réel est la somme de la série convergente.

Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge : la série diverge.

Même définition si $k \geq n_0$.

Remarque

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, ni de son indice initial n_0 : la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge ssi la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ converge.

Définition I.2

Reste d'une série convergente

Si la série de terme général u_k converge, on peut s'intéresser à la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes partiels, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste partiel d'ordre n de la série. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

Théorème I.1

1. Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge **alors** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors la série de terme général u_k diverge (série grossièrement divergente).

Evident car $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Séries du type télescopique :

Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = v_{k+1} - v_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = v_{n+1} - v_0 \quad \text{par télescopage}$$

Donc la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si c'est le cas, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$.

Exercice 1

Exercice de cours

Montrer que la série de t.g. $\frac{1}{k(k+1)}$ converge ($k \geq 1$) et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Théorème I.2

Combinaison linéaire de séries convergentes

Soit deux séries convergentes de termes généraux respectifs u_n et v_n , et $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel donné.

Alors la série de terme général $\alpha u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [\alpha u_k + v_k] = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Théorème I.3

Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$ et si les deux séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ sont convergentes, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

II. Séries de référence

Théorème II.1

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un réel fixé. $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En particulier la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.

Remarque

Exercice très classique : cf dernière partie

$\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) \right]$ et $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma \right]$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ est la constante d'Euler.

Remarque

Culture générale mathématique

La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ est définie sur $]1; +\infty[$. Elle s'appelle la fonction zeta, notée ζ .

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Ce résultat est le but de nombre d'exercices.

Théorème II.2

Séries géométriques et géométriques dérivées

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. La série géométrique $\sum_{k \geq 0} x^k$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

2. La série géométrique dérivée (première) $\sum_{k \geq 1} kx^{k-1}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

3. La série géométrique dérivée (seconde) $\sum_{k \geq 2} k(k-1)x^{k-2}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Remarque

Variantes

Si $|x| < 1$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k.x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k^2.x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

Remarque

Généralisation (HP)

La série $\sum_{k \geq r} k(k-1) \cdots (k-r+1).x^{k-r}$ converge ssi $|x| < 1$ (série géométrique dérivée r -ième) et dans ce cas

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1).x^{k-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

Formule du binôme négatif (HP)

La série $\sum_{k \geq r} \binom{k}{r}.x^{k-r}$ converge ssi $|x| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r}.x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Ces deux formules sont équivalentes, et assez souvent redémontrées en concours.

Théorème II.3

Série exponentielle

Pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

III. Critères de convergence des séries à termes positifs

Proposition III.1

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k positif. Alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.

Théorème III.1

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. **Critère d'équivalence** (à privilégier !!)

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k positif et si $u_k \sim_{+\infty} v_k$, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

2. **Critère de comparaison** Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$ et $u_k \leq v_k$ alors :

(a) Si la série $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge, alors la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge
et dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

(b) Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge, alors la série $\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge.

3. **Critère de négligeabilité**

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k \geq 0$ et si $u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(v_k)$ alors :

(a) Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$ converge, alors la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.

(b) Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ diverge, alors la série $\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge.

Le critère d'équivalence d'applique aussi avec des séries à termes négatifs (nouveau programme).

IV. Absolue convergence

Définition IV.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème IV.1

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque

La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ n'est pas absolument convergente, mais est convergente. Une telle série est dite semi-convergente.

Exercice 2

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
3. La série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est-elle absolument convergente ?

V. Exercices d'application

Exercice 3

Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général u_n et de premier terme u_0 dans les cas suivants:

$$\begin{array}{lll} a.u_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^{2n+3} & b.u_n = \frac{n-2}{3^n} & c.u_n = \frac{n}{(n+1)!} \\ d.u_n = (n^2 - n + 3) \left(\frac{1}{2}\right)^n & e.u_n = \frac{2^n n^2 + n!}{3^{n+1} n!} & f.u_n = \frac{2^n \ln^n(5) + 1}{n!} \end{array}$$

Exercice 4

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants:

1. $\forall n \geq 0$, $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
2. $\forall n \geq 0$, $u_n = e^{-n^2}$.
3. $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.
4. $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5

On admettra que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier que la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
2. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 6

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n où $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$.
3. On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

Exercice 7

1. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$.

(a) Déterminer les trois réels a , b et c tels que pour tout entier n non nul: $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8

1. Justifier la convergence de la série numérique suivante: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

2. Justifier la convergence de la série numérique suivante: $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Exercice 9

La constante d'Euler : un grand classique !!!

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

1. *Informatique* : Ecrire un programme en langage Python qui demande un entier $n \geq 1$ à l'utilisateur, puis qui calcule et affiche la valeur de w_n .
2. Justifier que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
3. Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge.
4. En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel γ , appelé *constante d'Euler*.