
Exercices - Rappels d'analyse

Exercice 1

Sur la fonction Arctan : quelques classiques

- Justifier que la fonction arctangente admet un point d'inflexion, préciser ses coordonnées.
- Déterminer un équivalent de $\text{Arctan}(x)$ au voisinage de 0.
- Que vaut $\tan(\text{Arctan}(x))$ pour tout réel x ?

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(2x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Calcul intégral

Justifier l'existence et donner la valeur des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} a. \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt & b. \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt & c. \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt \\ d. \int_0^1 t\sqrt{t^2+1} dt & e. \int_4^{e+3} \frac{1}{(3-x)^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}) & f. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx \\ g. \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx \quad (n \in \mathbb{N}) & h. \int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \frac{1}{t \ln(t)} dt & i. \int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+3x^2} dx \end{array}$$

Exercice 4

Intégrations par parties

Justifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \quad J = \int_1^e t \ln^2(t) dt \quad K = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx$$

Exercice 5

Calcul de limite

- Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$.
- En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \right)$

Exercice 6

Fonctions qui dépendent d'une intégrale

- Fonction des bornes d'une intégrale**

On note $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{2x} e^{t^2} dt$.

- Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x)) = +\infty$.
- Etudier la parité de F . En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x))$.

- Intégrale à paramètre**

On note $\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt$

- Montrer que F est définie et croissante sur $]0, +\infty[$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x)) = +\infty$.

Exercice 7

Le lemme de Lebesgue

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$.

- Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(\lambda x)}{x} \right) = 0$
- En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t) \cos(xt) dt \right) = 0$.

Exercice 8

Fonction dépendant d'une intégrale

Soit $f : x \rightarrow f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$.

On souhaite montrer que f est une application constante.

- Justifier que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- Méthode 1 :** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f' .
En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout réel x strictement positif.
- Méthode 2 :** A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que f est constante égale à 0.
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_3^{\frac{1}{3}} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$

Exercice 9

Petit exercice - produit de convolution : cf cours de probas plus tard !

Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $f \star g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \star g(x) = \int_0^x f(t).g(x-t) dt$$

- Etude d'un cas particulier :* déterminer $f \star g$ lorsque $f = g = \exp$.
- Prouver que $f \star g = g \star f$.
- Soit f et g paires. Déterminer la parité de $f \star g$.

Exercice 10

On note f la fonction suivante $f : x \rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

- Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Montrer que f est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f' .
- Etudier les variations de f .
- (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.
(b) En déduire les limites de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, de 0 à droite, de 0 à gauche.
(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 11

Sommes de Riemann

Pour chacune des suites suivantes, démontrer sa convergence et calculer sa limite:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n+3k}$$

Exercice 12**Des intégrales classiques**

On note: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ pour tout entier naturel p .
2. Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad I_{p,q} = I_{q,p}$
3. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
4. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx && \text{en posant} \quad u = 1 + \sqrt{x} \\ J &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt && \text{en posant} \quad t = \tan(x) \\ K &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt && \text{en posant} \quad t = \sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 14**Suites et séries**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$?
(b) En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 15**Développements limités (NEW)**

Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de e ;
2. $g(x) = \cos(x) \cdot e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0;
3. $h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0

Exercice 16**Formules de Taylor et séries**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$.

1. Justifier que la fonction $t \rightarrow \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$ et calculer ses dérivées successives.
2. En déduire que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$. Ecrire le résultat sous la forme d'une série.

Exercice 17**Utilisation des DL pour calculer des limites**

Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{aligned} a. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) & \quad b. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) & \quad c. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) \\ d. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x} \right) & \end{aligned}$$

Exercice 18**Inégalité de Taylor-Lagrange**

1. Montrer que, pour tout réel x , $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$
2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\left| \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \right| \leq \frac{5}{81} x^3$

Exercice 19**Suite, série (NEW)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum (u_n - 1)$.

Exercice 20**Formule du binôme négatif**

Soit r un entier naturel et x un réel tel que $x \in]0, 1[$.

1. (a) Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.
(b) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$.
(c) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r} x^n$ est convergente.
2. Pour tout entier naturel r , on pose : $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.
(a) Donner la valeur de S_0 .
(b) Etablir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x) S_{r+1} = x S_r$.
(c) En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}, \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

Exercice 21

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$.
2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 22**Autour de la série harmonique alternée**

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)^2} dx$.

1. Justifier que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n) = 0$.

(b) En intégrant par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

(c) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite, puis un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$.

(b) En déduire que, pour $n \geq 1$, $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(c) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} 2I_{2n+1}$$

(d) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge et calculer la somme suivante $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(e) Justifier que :

$$S_n - \ln(2) \sim n \rightarrow +\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$