DM n° 1 - pour le mardi 16 septembre 2025

Exercice 1 : suites, équivalents

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de g, limites comprises.
   (b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante puis que :
   $$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$
2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f_n'(x)$ pour tout réel $x > n$.
   (b) Montrer que pour tout réel $t > 0, \ln(t) \leq t-1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.
   (c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.
   Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n.
3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. (a) Justifier que:
   $$\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n}$$
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n) = 1$.
5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.
   (a) Justifier que:
   $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et $\ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$
   (b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$
6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2.

Exercice 2 : étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie A. Etude d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^n \, dt$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe. Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, convergente, de limite nulle.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n$
3. (a) A l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^u.u^k \, du$.
   (b) Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\left|\sum_{k=0}^{n} I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u} du\right| \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}$$
   (c) Prouver que la série $\sum_{k\geq 0} I_k$ est convergente et préciser sa somme $S = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k$.
   (d) A l'aide de ce qui précède et du 2), écrire un programme Python permettant, en calculant les valeurs successives de I_k, de déterminer et d'afficher une valeur approchée à 1/100 près de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u} \, du$.
   Tapez ce programme sur votre ordinateur et donnez le résultat obtenu.

Partie B. Etude d'une suite de fonctions définies par des intégrales

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction G_n telle que

$$\forall x \in [0; +\infty[, \; G_n(x) = \int_1^2 (\ln(t))^n . \ln(x+t) \, dt$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que G_n est une fonction définie sur $[0; +\infty[$. Montrer que la fonction G_n est croissante sur $[0; +\infty[$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$.
   Justifier que $\forall t \in [1, 2]$, $|\ln(x_2 + t) - \ln(x_1 + t)| \leq |x_2 - x_1|$.
   (b) Justifier que : $\forall (x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$, $|G_n(x_2) - G_n(x_1)| \leq I_n.|x_2 - x_1|$.
   (c) En déduire que G_n est continue sur $[0; +\infty[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $G_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.