

Chapitre 2 - Révisions d'algèbre et compléments : algèbre linéaire en dimension finie

I. Espaces vectoriels de dimension finie

I.1) Sous-espaces vectoriels

Définition I.1

Soit E un espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

1. $F \subset E$
2. $0_E \in F$
3. $\forall (u, v) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u + v \in F$ (on dit que F est stable par combinaison linéaire).

Proposition I.1

Soit E un espace vectoriel et F une partie de E . S'il existe des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ de E tels que

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

alors F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 1

On note $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(2) = 0\}$.

Montrer que H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 2

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $F = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); AB = BA\}$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. On suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 3

On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 3y = 2z\}$

Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Proposition I.2

1. Soit E un espace vectoriel, F et G deux s.e.v. de E . Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E .
2. Plus généralement si $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont des s.e.v. de E alors $\bigcap_{k=1}^n F_k$ est un s.e.v. de E .

I.2) Bases en dimension finie connue

Dans cette partie on suppose que E est un e.v. de dimension finie.

Théorème I.1

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $\mathcal{B}$ une famille formée de vecteurs de E . Alors

- $\mathcal{B}$ est une base de F
- $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre et génératrice de F
- $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est génératrice de F et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$
- $\Leftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{B}) = F$ et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$
- $\Leftrightarrow \mathcal{B} \subset F, \mathcal{B}$ est libre et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

On considère une famille de polynômes $(P_k)_{k \in [[0, n]]}$ de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant :

$$0 \leq \deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$$

Justifier que la famille $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ est une famille libre.

Retenir : une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Exercice 5

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Montrer que $(1, X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On la note $\mathcal{B}'$.
2. On note $T = -X + X^2$. Donner la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ des coordonnées de T dans la base canonique $\mathcal{B}$, puis la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(T)$ des coordonnées de T dans la base $\mathcal{B}'$.

I.3) Sous-espaces supplémentaires

Théorème I.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E et on note $E = F \oplus G$ si :

- $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
- $\Leftrightarrow$ tout vecteur u de E s'écrit de façon unique sous la forme $u = v + w$ où $v \in F$ et $w \in G$.
- $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$
- $\Leftrightarrow$ pour $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (v_1, \dots, v_q)$ est une base de G , la concaténation de ces deux bases $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de E .

I.4) Somme directe de n sous-espaces

Définition I.2

Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. de E et $F = \sum_{k=1}^n F_k$. On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si pour tout vecteur $u \in F$, il existe un unique $(u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $u = u_1 + \dots + u_n$.

On note alors $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$ ou encore $F = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.

Remarque

Attention, si $n \geq 3$, le fait que $F_1, \dots, F_n$ soient en somme directe ne peut pas s'exprimer à l'aide d'intersections.

On ne parle d'espaces supplémentaires que dans le cas de deux espaces.

Proposition I.3

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. E .

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad u_1 + \dots + u_n = 0_E \Rightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0_E$$

Proposition I.4

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. de dimension finie E .

Si les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe alors $\dim(\sum_{k=1}^n F_k) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k)$.

Théorème I.3

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie, munis respectivement d'une base $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = E$.
2. les s.e.v. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe et $\sum_{k=1}^n F_k = E$.
3. les s.e.v. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe et $\sum_{k=1}^n \dim(F_k) = \dim(E)$.
4. La famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ est une base de E .

II. Matrices de coordonnées

II.1) Matrice d'un vecteur dans une base

Définition II.1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout vecteur u il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

1. Ces nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. On appelle **matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** , la matrice colonne notée $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ définie par :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

On considère le vecteur $x = (1, 2, \dots, n)$. Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}_c}(x)$.

Exercice 7

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

1. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (1, (1+X), \dots, (1+X)^k, \dots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P = (1+X)^n$. Donner la matrice des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_c$, puis dans la base $\mathcal{F}$.

II.2) Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.2

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E .

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_r)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice obtenue en juxtaposant (ou en concaténant, ou en recollant) les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(Mat_{\mathcal{B}}(u_1) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_2) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_3) \mid \dots \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_{r-1}) \mid Mat_{\mathcal{B}}(u_r) \right)$$

Théorème II.1

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

Soit $r \in [[1, n]]$ et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_r)$ une famille de vecteurs de E .

Si :

1. $r = n$
2. la matrice carrée $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est **inversible**

alors la famille $\mathcal{F}$ est une **base** de E .

Exercice 8

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dans cette base puis dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9

Soit $i \in [[1, n]]$. On note v_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les $i-1$ premières coordonnées dans la base canonique sont nulles et les suivantes égales à 1.

1. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x = (1, 2, \dots, n)$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(x)$.

II.3) Matrice de passage

Définition II.3

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E .

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice des coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Proposition II.1

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E .

La matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

Théorème II.2

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et u un vecteur de E .

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \Leftrightarrow X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot X'}$$

On peut retenir la formule $\boxed{X = PX'}$

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^2$. Justifier que $\left((1, 0), (1, 1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de la base $\left((1, 0), (1, 1)\right)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que la famille (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ dans cette base puis dans la base canonique.

II.4) Inverse d'une matrice 2×2

Définition II.4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le réel

$$\det(A) = ad - bc$$

Théorème II.3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Si c'est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

III. Applications linéaires

III.1) Un exercice de révision

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = -3xP(x) + x^2P'(x)$$

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- (a) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E .
(b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n .
- L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
- Déterminer une base du noyau $\text{Ker}(f)$ de f .
- Déterminer une base de l'image $\text{Im}(f)$ de f .

III.2) Noyau et image

Définition III.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- L'ensemble $\text{Ker}(f) = \{u \in E; f(u) = 0_F\}$ est appelé **noyau** de f .
Soit $u \in E$. Alors

$$u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F$$

- L'ensemble $\text{Im}(f) = \{f(u); u \in E\}$ est appelé **image** de f .
Soit $v \in F$. Alors

$$v \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists u \in E; v = f(u)$$

Proposition III.1

1. $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
3. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
4. f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
5. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Théorème III.1**Théorème du rang**

Soit E un e.v. de dimension finie n et F un e.v.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont de dimension finie et

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Théorème III.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E . Alors

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

III.3) Matrice d'une application linéaire en dimension finie**Définition III.2**

Soit E et F deux e.v. de dimension finie, avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice à n lignes et p colonnes définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Si pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on note

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \epsilon_i$$

alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Remarque

- Lorsque $E = F$, la matrice est carrée. Dans ce cas, on utilise souvent deux fois la même base $\mathcal{B}_E$, et on notera $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}$ à la place de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}$.
- si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\alpha f + g) = \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(g)$$

III.4) Matrice de l'image d'un vecteur**Théorème III.3**

Soit E un e.v. de dimension finie p et F un e.v. de dimension finie n .

Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par la matrice colonne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

Autrement dit,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$$

III.5) Matrice d'une composée**Théorème III.4**

Soit E , F et G trois e.v. de dimensions finies, munis respectivement des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

III.6) Endomorphisme bijectif et matrice inversible**Théorème III.5**

Soit E un e.v. de dimension finie n , muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\Leftrightarrow M \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(M) = n \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice de f^{-1} est la matrice inverse de M :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f^{-1}) = M^{-1} = (\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f))^{-1}$$

III.7) Formule de changement de base**Théorème III.6**

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

On peut retenir la formule

$$A' = P^{-1}AP$$

où $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, où A est la matrice dans "l'ancienne base" : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et A' est la matrice dans la "nouvelle" base : $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 12

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\left((1, 1), (1, -2)\right)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$.

Soit f l'application linéaire donnée par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u, v) \longmapsto (17u + 30v, -9u - 16v)$

- (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_c$.
 (b) Montrer que les vecteurs $e'_1 = (2, -1)$ et $e'_2 = (-5, 3)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
 (c) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant la formule de changement de base.

IV. Polynômes d'endomorphismes et de matrices

IV.1) Polynômes d'endomorphismes

Soit E un e.v. de dimension n . Soit f un endomorphisme de E .

Définition IV.1

Soit r un entier naturel et $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$.
 On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^r a_k f^k$. Autrement dit,

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_r f^r$$

Exemple

Si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 5x + 7$ alors $P(f) = 2f^3 - 5f + 7Id_E$.

Proposition IV.1

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \text{ et } (P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

Définition IV.2

On dit que le polynôme P est annulateur de f si $P(f) = 0$.

Théorème IV.1

Tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.
 (Admis - sera prouvé pour les matrices)

IV.2) Applications particulières

Définition IV.3

Soit E un e.v. et f un endomorphisme de E .

1. f est une homothétie s'il existe un réel λ tel que $f = \lambda Id_E$.
2. f est un projecteur si $f \circ f = f$.
3. f est une symétrie si $f \circ f = Id_E$

Exercice 13

Donner un polynôme annulateur de f dans chacun des trois cas ci-dessus.

IV.3) Polynômes de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Définition IV.4

Soit r un entier naturel et $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$.
 On note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{k=0}^r a_k A^k$.

Exemple

Si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 5x + 7$ alors $P(A) = 2A^3 - 5A + 7I_n$.

Proposition IV.2

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \text{ et } (PQ)(A) = P(A).Q(A) = Q(A).P(A)$$

Définition IV.5

On dit que le polynôme P est annulateur de A si $P(A) = 0$.

Théorème IV.2

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

V. Propriétés des matrices

V.1) Rang d'une matrice

Définition V.1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On note C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de A où i est un entier compris entre 1 et p .

On appelle rang de A et on note $rg(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice A .

Dit autrement, le rang de A est égal au rang de la famille $(C_1, \dots, C_p)$

$$rg(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p))$$

Remarque

On note $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$. Ainsi $rg(A) = \dim(\text{Im}(A))$

Proposition V.1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $rg(A) \leq n$ et $rg(A) \leq p$
- $rg(A) = p \Leftrightarrow$ la famille des matrices colonnes $[C_1, C_2, \dots, C_p]$ de A est libre.
- $rg(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_{n,p}$
- Si la matrice A est une matrice échelonnée avec exactement r colonnes non nulles alors $rg(A) = r$.

Proposition V.2

Le cas des matrices carrées

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $rg(A) \leq n$
- $rg(A) = n \Leftrightarrow$ est inversible
- $rg(A) = n \Leftrightarrow$ la famille des matrices colonnes $[C_1, C_2, \dots, C_n]$ de A forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Une matrice A a le même rang que toutes ses matrices réduites de Gauss (c'est à dire les matrices obtenues par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A .)
- Si une matrice réduite de Gauss de A est une matrice échelonnée avec exactement r termes non nuls sur sa diagonale alors $rg(A) = r$.

Méthode Pour déterminer le rang d'une matrice A , on commence par

- ◇ Repérer les colonnes nulles. On peut alors extraire ces colonnes nulles pour obtenir une famille génératrice de $\text{Im}(A)$ plus petite.
- ◇ Repérer les colonnes identiques. Si A possède des colonnes identiques, on peut alors trouver une famille génératrice de $\text{Im}(A)$ plus petite.

- ◇ Repérer les colonnes proportionnelles (ou les lignes) proportionnelles. (règle de colinéarité)
- ◇ Vérifier la somme des coefficients par ligne. Si cette somme est constante, on additionnera toutes les colonnes.
- ◇ Chercher des combinaisons linéaires simples entre les colonnes pour obtenir l'une des colonnes en fonction des autres.
- ◇ Terminer par chercher si les matrices colonnes sont linéairement indépendantes.

Exercice 14

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Préciser si les matrices précédentes sont inversibles.

Proposition V.3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$rg(A) = rg({}^tA)$$

Remarque

Le rang d'une matrice est donc aussi égal au rang de sa famille de vecteurs lignes.

V.2) Rang d'un endomorphisme et rang de sa matrice

Définition V.2

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie.

On appelle **rang de l'endomorphisme** f la dimension de l'image de f .

$$rg(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Proposition V.4

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Le rang de f est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Autrement dit,

$$rg(f) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)))$$

Proposition V.5

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors

$$rg(f) = rg(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

Remarque

Le rang de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, déterminer le rang de f , déterminer une base de l'image, une base du noyau de l'application linéaire f associée canoniquement à A . "Canoniquement" signifie que f est une application linéaire qui va de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ et dont la matrice dans les bases canoniques correspondantes est A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

V.3) Noyau d'une matrice

Définition V.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$AX = 0$$

Autrement dit,

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}); AX = 0\}$$

Remarque

$\text{Ker}(A)$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

Théorème V.1

Théorème du rang matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = p$$

Exercice 16

Déterminer une base du noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

V.4) Matrices semblables

Définition V.4

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n .

Ces matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1} \Leftrightarrow A = Q^{-1}BQ$ en posant $Q = P^{-1}$.

La définition est symétrique en A et B !

Proposition V.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit f un endomorphisme de E . Alors les deux matrices $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables.

Proposition V.7

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Théorème V.2

Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.

Proposition V.8

Soit A et B deux matrices semblables. Alors elles ont le même rang :

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$$

V.5) Trace d'une matrice carrée

Définition V.5

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le scalaire noté $\text{Tr}(A)$, égal à la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Proposition V.9

1. L'application $A \mapsto \text{Tr}(A)$ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$$

2. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Remarque

La preuve du 2. est un classique à savoir refaire.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = I_n$.

Proposition V.10

Deux matrices semblables ont la même trace. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$$

Exercice 18

Que vaut $\dim(\text{Im}(Tr))$? $\dim(\text{Ker}(Tr))$?

V.6) Sous-espace stable

Définition V.6

Soit F un s.e.v. de E et f un endomorphisme de E . On dit que F est stable par f si pour tout $u \in F$, $f(u) \in F$. On peut dire aussi que $f(F) \subset F$.

Exemple

Soit E un e.v., f un endomorphisme de E , m un réel.

Les s.e.v. $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(f - m.Id_E)$, $\text{Im}(f)$ sont stables par f .

Proposition V.11

Soit E un e.v., f un endomorphisme de E . Soit F un s.e.v. de E . Si F est stable par f alors la restriction de f à F est un endomorphisme de F . Autrement dit $f|_F \in \mathcal{L}(F)$.