
Exercices - Chapitre 2 - Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B} = [1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n]$.

- Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $k \in [[0, n]]$. Déterminer les coordonnées de X^k dans cette base $\mathcal{B}$.
- Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers la base $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Noyau et image

Les questions suivantes sont indépendantes.

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - Que signifie $\text{Ker}(f) = E$? Que signifie $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$?
 - Que signifie $\text{Im}(f) = F$? Que signifie $\text{Im}(f) = \{0_F\}$?
- Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ et que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = O_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 2f$. Montrer que $\text{ker}(f - 2Id_E) = \text{Im}(f)$.
- Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = O_{\mathcal{L}(E)}$ et $rg(f) = n$. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

Exercice 3

Polynômes de Lagrange

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On considère $n + 1$ réels deux à deux distincts notés $x_0, x_1, \dots, x_n$.

On note, pour tout $k \in [[0, n]]$, P_k le polynôme défini par

$$P_k = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{1}{x_k - x_j} (X - x_j)$$

- On suppose que $n = 2$ dans cette question. Déterminer les polynômes P_0, P_1 , et P_2 .
- On revient au cas général. Préciser le degré du polynôme P_k pour tout entier $k \in [[0, n]]$.
- Pour tout $(k, i) \in [[0, n]]^2$, calculer $P_k(x_i)$. (On distinguera les cas où $i = k$ et $i \neq k$).
 - En déduire que la famille $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On la notera $\mathcal{B}'$.
- Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $R = Q - \sum_{k=0}^n Q(x_k) P_k$.
 - Calculer, pour tout $i \in [[0, n]]$, $R(x_i)$.
 - En déduire que R est le polynôme nul.
 - Préciser les coordonnées du polynôme Q dans la base $\mathcal{B}'$.
- En déduire la matrice de passage de la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On note φ l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto \varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

- Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Montrer que φ est un isomorphisme.
- Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 4

On note : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x - 3y + 4z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$

- Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur dimension.
- Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

On note $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a - b - c = 0 \text{ et } a - b - d = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$

- Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et préciser leur dimension.
- Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6

Fonctions paires et impaires

On note F l'ensemble des fonctions paires d'une variable réelle.

On note G l'ensemble des fonctions impaires d'une variable réelle.

- Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels.
- Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace E des fonctions d'une variable réelle.

Exercice 7

Matrices symétriques et antisymétriques

On note F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- On suppose dans cette question que $p = 2$.
 - Montrer que F et G sont deux espaces vectoriels et déterminer leur dimension.
 - En déduire qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Retour au cas général : $p \in \mathbb{N}^*$.
 - Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
 - Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Polynômes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X], f(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
- Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
- Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .
- L'endomorphisme f est-il bijectif?
- Montrer que f est un projecteur.
- Justifier que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Exercice 9

Déterminer le rang des matrices suivantes et le cas échéant, une base de leur noyau. Préciser si ces matrices sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une application dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$.

On note $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (-2, 1, 3)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On la note $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.

Soit $\mathcal{B} = ((1, 2), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$ deux familles de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$
3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$
4. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
5. Déterminer une relation entre les matrices P , P^{-1} et N .

Exercice 12

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur P de A .
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme P .
4. En déduire pour tout entier n , A^n .

Exercice 13

On note : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + {}^tM$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le rang de f .
3. Déterminer une base du noyau de f .
4. Montrer que le noyau et l'image de f sont des sous espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f .
6. Justifier que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 2Id)$
7. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, et le cas échéant une base du noyau et de l'image de f .
2. On note $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$ et $e'_3 = 3e_1 - 2e_2 - e_3$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .
 - (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
 - (c) Que peut-on dire de $H = \text{Vect}(e'_1, e'_2)$ et de la restriction de f à l'espace vectoriel engendré par e'_1 et e'_2 ?

Exercice 15

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

Soit G l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n dont 1 et -1 sont des racines d'ordre supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner une base.
2. Montrer que G et $\mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 3$, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $f_k = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) - e_k$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une base de E .
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}_1$ de E . Déterminer la matrice P^{-1} .

Exercice 17

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k \exp(x)$ pour tout x réel.

On note E_k l'espace vectoriel engendré par $f_0, f_1, \dots, f_k$.

On considère l'application définie, pour tout $f \in E_3$, par $\Phi(f) = f''' - 2f'' + f'$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_k = (f_0, f_1, \dots, f_k)$ est une base de E_k .
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_3 .
3. Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_3$ de E_3 .

Exercice 18

Soit n un entier naturel non nul fixé.

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On définit l'application Δ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

On note $\mathcal{C} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de E , où $\forall x \in \mathbb{R}, P_k(x) = x^k$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
2. (a) Soit P un élément de $\text{Ker}(\Delta)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire que P est un polynôme constant.
(b) Déterminer le noyau de Δ .
(c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ?
3. (a) Déterminer l'image par Δ du polynôme constant $P_0 = 1$. Déterminer $\Delta(P_k)$ pour tout entier k de $[[1, n]]$.
(b) En déduire la matrice de Δ dans la base $\mathcal{C}$.
(c) Donner une base de l'image de Δ .
4. $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[x]$?
5. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2) \dots (X-k+1)$ et $P_0(X) = 1$.
 - (a) Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E .
 - (b) Ecrire la matrice de Δ dans cette base.

Exercice 19

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On note id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E , et pour tout endomorphisme v de E , on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$. Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $u^3 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

1. Soit x un vecteur de E tel que $x \notin \text{Ker}(u^3)$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), u^3(x))$ est une base de E .
On la note $\mathcal{B}$.
2. Déterminer la matrice de g dans cette base $\mathcal{B}$. En déduire que g est un automorphisme de E .
3. Calculer $go(id_E - u)$. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u .

Exercice 20

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.
Montrer que $(x, u(x), u^2(x))$ est libre.
2. **Généralisation** : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .
On suppose qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $f^p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - (a) Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x))$ soit libre.
 - (b) Montrer que l'espace vectoriel $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^p(x))$ est stable par f .
 - (c) Montrer que la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^p)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que si E est de dimension finie n et si $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 21

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit λ un réel. Montrer que les sous-espaces stables par f sont exactement ceux qui sont stables par $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$.
2. Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par f et ceux qui sont stable par f^2 ?
3. On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
 - (a) Soit $p \neq q$.
Montrer que si $\text{Vect}(e_p)$, $\text{Vect}(e_q)$ et $\text{Vect}(e_p + e_q)$ sont stables par f alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
 $f(e_p) = \lambda e_p$ et $f(e_q) = \lambda e_q$.
 - (b) Que dire des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui laissent stables toutes les droites vectorielles ?

Exercice 22**Noyaux itérés**

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit p un entier naturel non nul.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1})$.
 - (b) Montrer que $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$.
2.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{O_E\}$.
 - (b) En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie alors :
 $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
3. Montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$

Exercice 23

Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 3f^2 - 2f$.

1. Prouver par analyse-synthèse que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2Id_E) = E$$

2. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
3. On considère les trois polynômes

$$P_0 = (X - 1)(X - 2) \quad P_1 = X(X - 2) \quad P_2 = X(X - 1)$$

- (a) Justifier que $\mathcal{D} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
- (b) Déterminer les coordonnées de 1 dans la base $\mathcal{D}$.
- (c) Soit $x \in E$. Justifier que pour $j = 0, j = 1, j = 2$, on a $P_j(f)(x) \in \text{Ker}(f - jId_E)$,
puis que $x \in \sum_{j=0}^2 \text{Ker}(f - jId_E)$.
- (d) Reprouver finalement que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2Id_E) = E$