Corrigé des Exercices - Rappels d'analyse

Exercice 1
Sur la fonction Arctan **: quelques classiques**

1. La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{puis} \quad \mathrm{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Par conséquent, Arctan$''$ s'annule et change de signe en 0.

Bilan : $\boxed{\text{Arctan admet un point d'inflexion en } O(0,0)}$

2. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(0) + \mathrm{Arctan}'(0).x + o_{x\to 0}(x) = x + o(x)$$

Donc $\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \sim_{x\to 0} x}$

Autre méthode :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0)}{x-0} = Arctan'(0) = 1$$

donc $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} = 1$, ce qui prouve le résultat.

3. Pour tout réel x, $\mathrm{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, comme Arctan est la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos(\mathrm{Arctan}(x))} = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sin^2(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos^2(\mathrm{Arctan}(x))} = x^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1-\cos^2(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos^2(\mathrm{Arctan}(x))} = x^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2(\mathrm{Arctan}(x))} = 1 + x^2 \Rightarrow \cos^2(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\mathrm{Arctan}(x))| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

De plus $\mathrm{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$.

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Exercice 2
On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\exp(2x^2)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto \exp(2x^2) - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais s'annule en 0, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0;+\infty[$.

- Comme $\exp(u) - 1 \sim_{u\to 0} u$ et $\lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$, on a $\exp(2x^2) - 1 \sim_{x\to 0} 2x^2$, donc $f(x) \sim_{x\to 0} 2x$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par conséquent f est continue en 0.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{4x\exp(2x^2).x - (\exp(2x^2)-1)}{x^2} = \frac{(4x^2-1).\exp(2x^2)+1}{x^2}$$

De plus, le DL en 0 à l'ordre 1 de $\exp(u)$ est $\exp(u) = u + o(u)$ d'où

$$f'(x) = \frac{(4x^2-1).(1+2x^2+o(x^2))+1}{x^2} = \frac{4x^2-1-2x^2+o(x^2)+1}{x^2} = 2 + o(1)$$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 2$.

- Ainsi : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0, avec $\lim_{x\to 0} f'(x) = 2$.
D'après le théorème de prolongement de la dérivée, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 2}$

Exercice 3
Calcul intégral

a. La fonction $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 \dfrac{t}{t^2+1}dt$ est bien définie. On montre de même l'existence de toutes les autres intégrales.

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt = [\frac{1}{2}\ln(t^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

b.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

c.

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int_0^1 1dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

d.

$$\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}dt = \int_0^1 t.(t^2+1)^{1/2}dt = [\frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2}]_0^1 = \frac{1}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_4^{e+3} \frac{1}{(3-x)^n}dx = \int_4^{e+3} (3-x)^{-n}dx$$

Si $n = 1$,

$$I_1 = \int_4^{e+3} (3-x)^{-1}dx = [-\ln(|3-x|)]_4^{e+3} = -\ln(e) + \ln(1) = -\ln(e)$$

Si $n \neq 1$,

$$I_n = [-\frac{(3-x)^{-n+1}}{-n+1}]_4^{e+3} = -\frac{(-e)^{-n+1}}{-n+1} + \frac{(-1)^{-n+1}}{-n+1}$$

f.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(1) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

g.

$$\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}dx = [\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x)]_1^e = \frac{1}{n+1}$$

h.

$$\int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \frac{1}{t\ln(t)}dt = [\ln(|\ln(t)|)]_{e^{-1}}^{e^{-2}} = \ln(|\ln(e^{-2}|)) - \ln(|\ln(e^{-1})|) = \ln(2)$$

i.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+3x^2}dx = [\frac{1}{9}(1+3x^2)^{3/2}]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{9}(25^{3/2}-1)$$

Exercice 4
Intégrations par parties

- La fonction $x \mapsto x^2\sin(x)$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par produit, donc l'intégrale I est bien définie. On montre de même que les deux autres intégrales sont bien définies.
Posons

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \to \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on peut donc intégrer par parties :

$$I = [-x^2.\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos(x)dx = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos(x)dx$$

Posons ensuite

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$$

Ces fonctions u et v étant de nouveau de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, par IPP

$$I = 2.[x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \pi - 2.[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

Bilan : $\boxed{I = \pi - 2}$

- Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln^2(t) \\ v'(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = 2\ln(t).\frac{1}{t} \\ v(t) = t^2/2 \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$, on peut intégrer par parties :

$$J = [\frac{t^2}{2}.\ln^2(t)]_1^e - \int_1^e t.\ln(t)dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e t.\ln(t)dt$$

et on doit à nouveau intégrer par parties pour calculer la seconde intégrale. Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t^2/2 \end{cases}$$

avec encore deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{e^2}{2} - ([\frac{t^2}{2}\ln(t)]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}dt) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}.[\frac{t^2}{2}]_1^e \\ &= \frac{1}{2}(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{e^2-1}{4} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{J = \frac{e^2-1}{4}}$

- Posons

$$\begin{cases} u(x) = \cos(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\sin(\ln(x)).\frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e^\pi]$. Par IPP

$$K = [x\cos(\ln(x)))]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))dx$$

$$= -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))dx$$

et on procède à une seconde IPP, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \cos(\ln(x)).\frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

avec encore des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} K &= -e^{-\pi} - 1 + [x\sin(\ln(x))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))dx \\ &= -e^\pi - 1 - K \end{aligned}$$

et on obtient ainsi une équation en K !!
D'où $2K = -(e^\pi + 1)$ puis
Bilan : $\boxed{K = -\frac{e^\pi+1}{2}}$ *Retenir : s'il n'y a pas de produit dans l'intégrale, on peut essayer de poser $v'(x) = 1$...*

Exercice 5
Calcul de limite

1. Pour tout $t \in]0; +\infty[$,

$$t^2 + 1 \geq t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$$

De plus, $t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, d'où

$$t^2 + 1 \leq (t+1)^2 \Rightarrow \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{(t+1)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{1}{t+1}$$

Bilan : $\boxed{\forall t \in]0, +\infty[, \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}}$

2. Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors $x < 2x$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens), les fonctions en question étant bien continues sur $[x, 2x]$,

$$\begin{aligned} &\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}dx \\ \Rightarrow \quad &[\ln(t+1)]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leq [\ln(t)]_x^{2x} \\ \Rightarrow \quad &\ln(\frac{2x+1}{x+1}) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leq \ln(2) \quad \text{après simplifications} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$, et par continuité de la fonction ln, $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \ln(2)$.
Finalement, par le théorème des gendarmes,

Bilan : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\right) = \ln(2)}$

Exercice 6
Fonctions qui dépendent d'une intégrale

1. **Fonction des bornes d'une intégrale**

   (a) Notons $g : t \mapsto e^{t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt$ est bien définie. Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(2x) - G(x)$.
   Comme G est dérivable sur R, $x \to G(2x)$ l'est aussi. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2e^{4x^2} - e^{x^2} \end{aligned}$$

   (b) $\forall x \geqslant 0$, $e^{t^2} \geqslant 1$ donc $F(x) \geqslant \int_x^{2x} 1dt$ (croissance de l'intégrale, bornes dans le bon sens).

$$\begin{aligned} F(x) &\geqslant 2x - x \\ F(x) &\geqslant x. \end{aligned}$$

   Par entraînement $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{t^2}dt$$

   (2) Posons $u = -t$
   (2) $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   (3) Bornes $\begin{cases} -2x \\ -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \\ x \end{cases}$

(4) $du = -dt$
(5) $e^{t^2}dt = e^{(-u)^2}(-du) = -e^{u^2}du$
(6) $u \mapsto e^{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par changement de variables,

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{t^2}dt = -\int_x^{2x} e^{u^2}du = -F(x)$$

donc la fonction F est impaire.

On en déduit que $\lim_{x\to-\infty}(F(x)) = -\infty$.

2. **Intégrale à paramètre**

On note $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{xt^2}dt$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}+$ un réel fixé. $t \mapsto e^{xt^2}$ it continue sur $[0;1]$, donc l'intégrale $F(x) = \int_0^1 e^{xt^2}dt$ est définie. F est donc définie sur R_+.
Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x \leq y$.
Alors $\forall t \in [0,1], xt^2 \leq yt^2$
$\Rightarrow e^{xt^2} \leq e^{yt^2}$ (croissance de la fonction exp)
$\to \int_0^1 e^{xt^2}dt \leq \int_0^1 e^{yt^2}dt$ (bornes bon sens)
$\Rightarrow F(x) \leq F(y)$

Bilan : $\boxed{F \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

(b) $\forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right], t^2 \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow e^{xt^2} \geqslant e^{x/4}$

$$F(x) = \int^1 e^{xt^2}dt = \int_0^{1/2} e^{xt^2}dt + \int_{1/2}^1 e^{xt^2}dt \quad \text{(Chasles)}$$

Or $\int_0^{1/2} e^{xt^2}dt \geqslant 0$ et $\int_{1/2}^1 e^{xt^2}dt \geqslant \int_{1/2}^1 e^{x/4}dt = \frac{1}{2}e^{x/4}$. D'où $F(x) \geqslant \frac{1}{2}e^{x/4}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{x/4} = +\infty$ par entrainement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

Exercice 7
Le lemme de Lebesgue
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

$$\left|\frac{\sin(\lambda x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$$

Comme $\lim \frac{1}{x} = 0$ par encadrement $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = 0$

2. Posons

$$\begin{cases} u(t) = f(t) \\ v'(t) = \cos(xt) \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{\sin(xt)}{x} \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Par IPP,

$$\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = \left[f(t)\cdot\frac{\sin(xt)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(x)dt$$
$$= f(b)\cdot\frac{\sin(xb)}{x} - f(a)\cdot\frac{\sin(xa)}{x} - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt$$

D'après le 1.,
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(xb)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(xa)}{x} = 0$
De plus, $\forall x > 0$,

$\left|\frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_a^b |f'(t)\sin(xt)|\,dt$
(inégalité triangulaire pour les intégrales, $a < b$)
$\leq \frac{1}{x}\int_a^b |f'(t)|\cdot|\sin(xt)|dt$
$\leq \frac{1}{x}\int_a^b |f'(t)|dt$ car $|\sin(xt)| \leq 1$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int^b |f'(t)|\,dt = 0$ (l'intégrale est une constante ici)
donc par encadrement $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cdot\sin(xt)dt = 0$.
Finalement, par somme, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = 0}$

Remarque : ce résultat s'interprète bien graphiquement : cf illustration Python.

Exercice 8
Fonction dépendant d'une intégrale
Soit $f : x \to f(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.
On souhaite montrer que f est une application constante.

1. Soit $x \in]0;+\infty[$. La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Par conséquent, comme $]x,\frac{1}{x}[\subset]0;+\infty[$, $f(x) = \int_{1/x}^x \frac{h(t)}{t^2+z}dt$ existe bien.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[}$

2. **Méthode 1 :** Notons G une primitive de g sur $]0;+\infty[$.
Alors $\forall x > 0$,

$$f(x) = G(x) - G(1/x)$$

Etant une primitive, G est derivable sur $]0;+\infty[$.
De plus $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est derivable sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Par composition, puis différence, f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)G'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= g(x) + \frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\times\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}+1} \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2+y} - \frac{\ln(x)}{x^2+1} \quad \text{car} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $]0;+\infty[$.
$\forall x > 0,\quad f(x) = f(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = 0$

3. **Méthode 2 :**
(1) Posons $u = \frac{1}{t}$
(2) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
(3) Bornes $\begin{cases} t = x \\ t = \frac{1}{x} \end{cases} \to \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ u = x \end{cases}$
(4) $dt = -\frac{1}{u^2}du$
(5) $\frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^2}+1}\times\left(-\frac{1}{u^2}du\right) = \frac{\ln(u)}{u^2+1}du$
(6) $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u^2+1}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
Par CDV,

$$f(x)=\int_x^{1/x}\frac{\ln(u)}{u^2+1}du=-f(x)$$
$$\text{d'où}\quad 2f(x)=0 \text{ et } f(x)=0$$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[,\quad f(x)=0$

4. En prenant $x=\frac{1}{3}$, on a donc $\int_3^{1/3}\frac{\ln(t)}{t^2+1}dt=0$.

Exercice 9
Petit exercice - produit de convolution : cf cours de probas plus tard !

Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $f\star g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f\star g(x)=\int_0^x f(t).g(x-t)dt$$

1. *Etude d'un cas particulier :* déterminer $f\star g$ lorsque $f=g=\exp$.
   On suppose que $f=g=\exp$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$, $f*g(x)=\int_0^x e^t\cdot e^{x-t}dt=\int_0^x e^x dt=xe^x$
2. Prouvons que $f\star g=g\star f$.

$$g*f(x)=\int_0^x g(t)f(x-t)dt=\int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

(1) Posons $u=x-t$

(2) $t\mapsto x-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(3) Bornes $\begin{cases} t=x\\ t=0\end{cases}\to\begin{cases} u=0\\ u=x\end{cases}$

(4) $du=-dt$

(5) $f(x-t)g(t)dt=f(u)g(x-u)(-du)$

(6) $u\mapsto -f(u)g(x-u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par CDV, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$g*f(x)=-\int_x^0 f(u)g(x-u)du=\int_0^x f(u)g(x-u)du=f*g(x)$$

Donc $g*f=f*g$

3. Soit f et g paires. Déterminons la parité de $f\star g$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f*g(-x)=\int_0^{-x} f(t)g(-x-t)dt$$

(2) Posons $u=-t$

(2) $t\to -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Bomes $\begin{cases} t=-x\\ t=0\end{cases}\to\begin{cases} u=x\\ u=0\end{cases}$

(4) $du=-dt$

(5) $f(t)g(-x-t)dt=f(-u)\cdot g(-x+u)(-du)$

(6) $u\mapsto -f(-u)g(-x+u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par CDV,

$$\begin{aligned} f*g(-x)&=-\int_0^x f(-u)g(-x+u)du\\ &=-\int_0^x f(u)g(x-u)du \text{ par parité de } f\\ &=-f*g(x)\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont paires alors la fonction } f*g \text{ est impaire}}$

Exercice 10
On note f la fonction suivante $f:x\to\int_x^{2x}\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   $t\mapsto 1+t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1;+\infty[$. De plus $1+t^2=1\Leftrightarrow t=0$. Donc $t\mapsto\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   - Soit $x\in]0;+\infty[$. Alors $2x\in]0;+\infty[$ et l'intégrale $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(t+t^2)}dt$ est bien définie.
   - Soit $x\in]-\infty,0[$. Alors $2x\in]-\infty;0[$ et $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$ est bien définie.

   <u>Bilan :</u> $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$
2. Montrons que f est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculons f'.
   $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

(1) Posons $u=-t$
(2) $t\to -t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(3) Bornes $\begin{cases} t=-2x\\ t=-x\end{cases}\to\begin{cases} u=2x\\ u=x\end{cases}$
(4) $du=-dt$
(5) $\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt=-\frac{1}{\ln(1+u^2)}du$
(6) $u\mapsto\frac{1}{\ln(1+u^2)}$ est continue sur $[x;2x]$ ou $[2x;x]$.
Par CDV,

$$f(-x)=-\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+uu^2)}du=-f(x)$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{f \text{ est impaire}}$
Notons $g:t\mapsto\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=G(2x)-G(x).\ \text{G est dérivable sur } \mathbb{R}^*.$$

$x\mapsto G(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition.
Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)&=2G'(2x)-G'(x)\\ &=2g(2x)-g(x)\\ &=\frac{2}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\end{aligned}$$

3. Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{2}{\ln(1+4x^2)}\geqslant\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$\Leftrightarrow\frac{\ln(1+4x^2)}{2}\leq\ln(1+x^2)\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)\leq\ln(1+x^2)$
$\Leftrightarrow\sqrt{1+4x^2}\leq 1+x^2\quad$ (croissance ln)
$\Leftrightarrow 1+4x^2\leq 1+2x^2+x^4$
$\Leftrightarrow x^4-2x^2\geqslant 0\Leftrightarrow x^2(x^2-2)\geqslant 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2			$+$		‖		$+$		
x^2-2		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x^2(x^2-2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
&\forall t \in (x;2x], \quad x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \\
&\Rightarrow \ln\left(1+x^2\right) \leq \ln\left(1+t^2\right) \leq \ln\left(1+4x^2\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)} \text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0;+\infty[
\end{aligned}$$

En intégrant (bornes dans le bon sens : $x < 2x$) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2)}dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2}dt$$

D'où puisque l'on intègre des constantes :

$$\boxed{\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+4x^2)} &= \frac{x}{\ln(x^2(4+\frac{1}{x^2})} = \frac{x}{2\ln(x)+\ln(4+\frac{1}{x^2})} \\
&= \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{1}{2+\frac{\ln(4+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}}
\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$, et par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{\ln(4+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}} = \frac{1}{2}$.

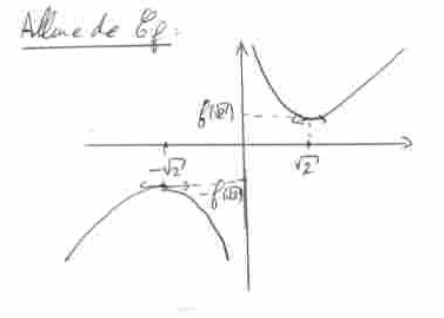
D'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$ et par entrainement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
Par imparité, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Comme $\lim_{x\to 0^+} 4x^2 = 0$, $\ln(1+4x^2) \sim_{x\to 0} 4x^2$ (équivalent classique), donc

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim_{x\to 0^+} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x}$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4x} = +\infty}$
Par imparité, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

(c) Allure de la courbe représentative de la fonction f :



Exercice 11
Sommes de Riemann
Pour chacune des suites suivantes, démontrer sa convergence et calculer sa limite:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}}, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n+3k}$$

1.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

où $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. On reconnait alors une somme de Riemann, associée à la fonction f qui est continue sur $[0,1]$. D'après le cours,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$$

2.
$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\sin(\pi.t)$.
v_n est une somme de Riemann associée à la fonction f, qui est continue sur $[0,1]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 t\sin(\pi.t)dt = I$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(\pi.t) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(\pi.t)}{\pi} \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par IPP,

$$\begin{aligned}
I &= [-\frac{t\cos(\pi.t)}{\pi}]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi.t)dt \\
&= -\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{\pi}[\frac{\sin(\pi.t)}{\pi}]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(0-0) = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\pi}}$

3.
$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n.k/n}{n(2+3k/n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{2+3.k/n} = n \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{2+3t}$. Comme f est continue sur $[0,1]$, toujours d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 \frac{t}{2+3t}dt = J$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{2+3t}$ étant continue, positive et différente de la fonction nulle sur $[0,1]$, on a $J > 0$. Comme

$$w_n = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

par produit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$

Remarque : nous aurions pû calculer J via la méthode :

$$J = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2+3t-2}{2+3t}dt = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{2+3t}dt = ...$$

etc... mais cela n'est pas utile pour déterminer la limite qui est demandée.

Exercice 12
Des intégrales classiques
On note: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$,
$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = [\frac{x^{p+1}}{p+1}]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

2. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,
$$I_{q,p} = \int_0^1 x^q.(1-x)^p dx = \int_0^1 (1-x)^p.x^q dx$$

   - Posons $u = 1-x$
   - La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$
   - Bornes $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right.$
   - $du = -dx$
   - $(1-x)^p.x^q dx = -u^p.(1-u)^q$
   - $u \mapsto -u^p.(1-u)^q$ est continue sur $[0,1]$.

   Par changement de variables,
$$I_{q,p} = -\int_1^0 u^p.(1-u)^q du = I_{p,q}$$

   Bilan : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{q,p} = I_{p,q}}$

3. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p+1,q} = \int_0^1 x^{p+1}.(1-x)^q dx$
Posons
$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^{p+1} \\ v'(x) = (1-x)^q \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u'(x) = (p+1).x^p \\ v(x) = -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \end{array}\right.$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{array}{rcl} I_{p+1,q} & = & [-x^{p+1}.\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}]_0^1 + \frac{p+1}{q+1}.\int_0^1 x^p.(1-x)^{q+1}dx \\ & = & \frac{p+1}{q+1}.I_{p,q+1} \end{array}$$

   Autrement dit :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall q \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p+1}{q+1}.I_{p,q+1}$$

4. On procède par itérations successives (pointillés) : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} I_{p,q} & = & \frac{p}{q+1}.I_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1}.\frac{p-1}{q+2}.I_{p-2,q+2} \\ & = & \cdots \\ & = & \frac{p}{q+1}.\frac{p-1}{q+2}.\frac{p-2}{q+3}.\cdots.\frac{1}{q+p}.I_{0,q+p} \\ & = & \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)}.I_{0,q+p} \\ & = & \frac{p!.1.2.\cdots.q}{1.2.3.\cdots.q.(q+1).\cdots.(q+p)}.I_{q+p,0} \\ & = & \frac{p!.q!}{(p+q)!}.\frac{1}{p+q+1} \end{array}$$

   Bilan : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$