

Corrigé des Exercices - Rappels d'analyse

Exercice 13

- On pose le changement de variables $u = 1 + \sqrt{x}$. La fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement croissante sur $[1, 4]$, bijective de $[1, 4]$ sur $[2, 3]$. Le changement de variables est donc autorisé.

Bornes : $\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$
 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ou aussi $x = (u - 1)^2$ donc $dx = 2.(u - 1)du$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{1}{u} \cdot 2.(u - 1) du \\ &= 2. \int_2^3 1 du - 2. \int_2^3 \frac{1}{u} du = 2 - 2. [\ln(u)]_2^3 \\ &= 2.(1 - \ln(3) + \ln(2)) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{I = 2.(1 - \ln(3) + \ln(2))}$

- On pose $t = \tan(x)$. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, elle est bijective de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, 1]$. Le changement de variables est donc autorisé.

Bornes : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ et $dt = (1 + \tan^2(x))dx$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2(x))^2} \cdot (1 + \tan^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) dx \end{aligned}$$

car $1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ puisque $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Ainsi $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) dx$. Il faut ensuite linéariser $\cos^2(x)$. On sait que :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

donc $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ et $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{J = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$

- On pose $t = \sin(x)$. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, bijective de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le changement de variables est donc autorisé.

Bornes : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ et $dt = \cos(x)dx$.

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} \cdot \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}} \cdot \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 dx \quad (\text{car la fonction } \cos \text{ est positive sur } [0, \frac{\pi}{6}]) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{K = \frac{\pi}{6}}$

Exercice 13 : suites et séries

- (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n) : u_n \in]0, 1[$.

- Initialisation : $u_0 \in]0, 1[$ donc $H(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie.

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$$

Comme $0 < u_n < 1$, on a aussi $0 < 1 - u_n < 1$ donc $u_n(1 - u_n) \in]0, 1[$. Ainsi $H(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[}$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Etant décroissante et minorée, la suite (u_n) converge vers une limite $l \in [0, 1]$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient $l = l - l^2$ donc $l^2 = 0$ et $l = 0$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

- Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = u_0$.

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 \text{ est convergente et } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0}$

- (a) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})$.

$$T_n = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \quad (\text{téléscopage})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -\infty$.

Bilan : $\boxed{\text{la série de terme général } \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) \text{ est divergente}}$

- (b) $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}) = \ln(1 - u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} -u_n$
car $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = 0$. Donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $-\sum_{n \geq 0} \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ sont de même nature. D'après le 3.(a), la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est donc divergente.

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente}}$

Exercice 15 : DL

- D'après la formule de Taylor-Young, appliquée à la fonction $\ln$, en $a = e$ à l'ordre 3 :

$$\ln(x) = \ln(e) + \ln'(e).(x - e) + \ln''(e) \cdot \frac{(x - e)^2}{2} + \ln^{(3)}(e) \cdot \frac{(x - e)^3}{3!} + o_{x \rightarrow e}((x - e)^3)$$

Or $\ln(e) = 1$, $\ln'(e) = \frac{1}{e}$, $\ln''(e) = -\frac{1}{e^2}$ et $\ln^{(3)}(e) = \frac{2}{e^3}$. On en déduit que

$$\ln(x) = 1 + \frac{1}{e} \cdot (x - e) - \frac{1}{2e^2} \cdot (x - e)^2 + \frac{1}{3e^3} \cdot (x - e)^3 + o((x - e)^3)$$

Autre méthode : on pose $x = e + h$, alors

$$\ln(x) = \ln(e + h) = \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right)$$

Rappelons le DL de $\ln(1 + t)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} (\frac{h}{e}) = 0$, on en déduit que :

$$\ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) = \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3)$$

et enfin

$$\ln(x) = \ln(e) + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3) = 1 + \frac{1}{e} \cdot (x - e) - \frac{1}{2e^2} \cdot (x - e)^2 + \frac{1}{3e^3} \cdot (x - e)^3 + o_{x \rightarrow e}((x - e)^3)$$

2. Le DL de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Le DL de $\exp(u)$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, on en déduit que

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et par produit,

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x) \cdot e^{-x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Exercice 16 : Formule de Taylor et série

1. $t \mapsto 1 - t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. Comme la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit par composition que $t \mapsto \ln(1 - t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$. Pour tout $t \in] -\infty, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{1-t} & f''(t) &= -\frac{1}{(1-t)^2} = -(1-t)^{-2} \\ f^{(3)}(t) &= 2 \cdot (1-t)^{-3} \cdot (-1) = -2 \cdot (1-t)^{-3} & f^{(4)}(t) &= -6 \cdot (1-t)^{-4} \\ f^{(5)}(t) &= -24 \cdot (1-t)^{-5} & & \text{etc...} \end{aligned}$$

Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H(k) : \quad \forall t \in] -\infty, 1[, \quad f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$$

• Initialisation : si $k = 1$, $\forall t \in] -\infty, 1[$,

$$f'(t) = -\frac{1}{1-t} = -\frac{0!}{(1-t)^1}$$

donc $H(1)$ est vraie.

Attention, $H(0)$ est fausse !

• Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(k)$ est vraie : $\forall t \in] -\infty, 1[$,

$$f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k} = -(k-1)! \cdot (1-t)^{-k}$$

d'où en dérivant :

$$f^{(k+1)}(t) = -(k-1)! \cdot (-k) \cdot (1-t)^{-k-1} \cdot (-1) = -\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$$

donc $H(k+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\boxed{\forall t \in] -\infty, 1[, \quad f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}}$

2. Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

• La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, x]$

• $\forall t \in [0, x]$,

$$|f^{(n+1)}(t)| = \left| -\frac{n!}{(1-t)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

Comme $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a

$$\frac{1}{2} \leq 1 - t \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq (1-t)^{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \leq 2^{n+1}$$

par croissance de la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse.

• D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, applique à f en 0 à l'ordre n ,

$$|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k| \leq 2^{n+1} \cdot \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &|\ln(1-x) - \ln(1) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k| \leq \frac{2^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow &|\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n -\frac{(k-1)! \cdot x^k}{k!}| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow &|\ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{x}| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

3. En prenant $x = \frac{1}{2}$, d'après le 2.,

$$|\ln(\frac{1}{2}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} + \ln(\frac{1}{2}) = 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} = -\ln(1/2) = \ln(2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$.

Bilan : $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{k \cdot 2^k} \text{ est convergente et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln(2)}$

Exercice 17 : DL et calcul de limites

- a.
- $$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\sin(x) \cdot \ln(1+x)}$$
- $\sin(x) \cdot \ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x^2$ (équivalents classiques)
 -
- $$\ln(1+x) - \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$$
- Par quotient d'équivalents, on en déduit que

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Bilan : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}}$

- b.
- $$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)}$$
- $x \sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x^2$
 -
- $$\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{3!} - x + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{6}$$
- Par quotient d'équivalences,

$$\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{6} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$$

Bilan : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} = 0}$

- c.
- $$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \cdot x}$$
- $(e^x - 1) \cdot x \sim_{x \rightarrow 0} x^2$ (équivalents classiques)
 -
- $$x - e^x + 1 = x + 1 - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$$
- Donc par quotient, on obtient aisément que $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.

Bilan : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}}$

- d.
- $$\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{\ln(1-x) + x}{x^2}$$
- $$\ln(1-x) + x = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) + x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$$

D'où

$$\frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

Bilan : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}}$

Exercice 18 : Taylor

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'intervalle $I_x = [-|x|, |x|]$. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in I, \quad |\exp''(t)| = e^t \leq e^{|x|}$$

par croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x \in I$ et $0 \in I$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $\exp$ en 0 à l'ordre 2 et sur l'intervalle I ,

$$|\exp(x) - \exp(0) - \exp'(0) \cdot x| \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} \cdot e^{|x|}$$

Remarque : $I = [-|x|, |x|]$ est un intervalle intéressant car il contient à la fois 0 et x , et il est facile de majorer $|\exp''|$ sur cet intervalle.

2. Soit $f : t \mapsto (1+t)^{1/3}$, $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.
 f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+t)^{1/3} & f'(t) &= \frac{1}{3} \cdot (1+t)^{-2/3} \\ f''(t) &= -\frac{2}{9} \cdot (1+t)^{-5/3} & f^{(3)}(t) &= \frac{10}{27} (1+t)^{-7/3} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ un réel fixé. Pour tout $t \in [0, x]$,

$$\begin{aligned} 1 \leq 1+t \leq 1+x &\Rightarrow 1 \leq (1+t)^{7/3} \leq (1+x)^{7/3} \text{ par croissance sur } \mathbb{R}_+ \text{ de la fonction } t \mapsto t^{7/3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^{7/3}} \leq 1 \text{ par décroissance de la fonction inverse sur }]0; +\infty[\\ &\Rightarrow |f^{(3)}(t)| \leq \frac{10}{27} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young appliquée à f sur $[0, x]$, à l'ordre 2 :

$$|f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - f''(0) \cdot \frac{x^2}{2}| \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{|x-0|^3}{3!}$$

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, |\sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2| \leq \frac{5}{81}x^3}$

Exercice 19 : suite, série

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha})) = \exp(v_n)$$

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. Par équivalence classique,

$$\ln(1 + \frac{1}{n^\alpha}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

puis $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Si $\alpha = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Si $\alpha = 0$ alors $u_n = 2^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Si $\alpha < 0$ alors on a facilement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > 1 \\ e & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

2. Si $\alpha < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = +\infty$ donc la série est grossièrement divergente. Si $\alpha = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = e - 1 \neq 0$ donc la série est grossièrement divergente. Si $\alpha > 1$,

$$u_n - 1 = e^{v_n} - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

par équivalence classique puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ dans ce cas. On reconnaît une série de Riemann, qui converge ssi $\alpha - 1 > 1$ donc $\alpha > 2$. Par critère d'équivalence (séries à termes positifs), on peut enfin en conclure que :

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum (u_n - 1) \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 2}$

Exercice 20 : formule du binôme négatif : un classique !!! Soit $r \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$.

1. (a)

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{1}{r!} n(n-1) \cdots (n-r+1)$$

Or

$$\begin{cases} n \sim_{n \rightarrow +\infty} n \\ n-1 \sim_{n \rightarrow +\infty} n \\ \dots \\ n-r+1 \sim_{n \rightarrow +\infty} n \end{cases}$$

d'où par produit d'équivalents (r termes), $n(n-1) \cdots (n-r+1) \sim_{n \rightarrow +\infty} n^r$. D'où, $\frac{1}{r!}$ étant une constante,

$$\boxed{\binom{n}{r} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{r!}}$$

(b)

$$\begin{aligned} n^{r+2} \cdot x^n &= e^{(r+2)\ln(n)} \cdot e^{n\ln(x)} \\ &= e^{n\ln(x) + (r+2)\ln(n)} = e^{n \cdot [\ln(x) + (r+2) \cdot \frac{\ln(n)}{n}]} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x) + (r+2) \cdot \frac{\ln(n)}{n} = \ln(x) < 0 \quad \text{car } x \in]0, 1[$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot [\ln(x) + (r+2) \cdot \frac{\ln(n)}{n}] = -\infty$ et par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot [\ln(x) + (r+2) \cdot \frac{\ln(n)}{n}]} = 0$

Bilan : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} \cdot x^n = 0}$

(c)

$$\frac{\binom{n}{r} x^n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \cdot \binom{n}{r} x^n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} n^{r+2} x^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'après le (a) et le (b).

Ainsi $\binom{n}{r} x^n = o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } \binom{n}{r} x^n \text{ converge}}$

2. (a) $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$: série géométrique avec $|x| < 1$.

(b)

$$\begin{aligned} (1-x)S_{r+1} &= (1-x) \cdot \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+2}^{+\infty} \binom{n-1}{r+1} x^n \quad \text{après changement d'indice} \\ &= \binom{n+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty} \left[\binom{n}{r+1} - \binom{n-1}{r+1} \right] x^n \end{aligned}$$

D'après le triangle de Pascal, $\binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r+1}$ d'où $\binom{n}{r+1} - \binom{n-1}{r+1} = \binom{n-1}{r}$ et

$$\begin{aligned} (1-x)S_{r+1} &= x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty} \binom{n-1}{r} x^n \\ &= x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \quad \text{en changeant d'indice} \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \quad \text{en rentrant le premier terme dans la somme} \\ &= x \cdot S_r \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{(1-x)S_{r+1} = xS_r}$$

Remarque : pour tout $r \in \mathbb{N}$, $S_{r+1} = \frac{x}{1-x} \cdot S_r$: (S_r) est une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$.

(c) D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout $x \in]0, 1[$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_r = (\frac{x}{1-x})^r \cdot S_0 = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$
d'après le 2.(a).

Exercice 21 :

- On montre par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq (\frac{1}{2})^n \cdot u_0$.
- La série $\sum_{n \geq 0} (\frac{1}{2})^n$ est une série géométrique convergente (car $|1/2| < 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est convergente}}$

Exercice 22 : autour de la série harmonique alternée

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{x^n}{(1+x^2)^2}$ sont continues sur $[0, 1]$ donc les intégrales I_n et J_n sont correctement définies.

2.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = [\frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

- (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, $1+x^2 \geq 1$, donc $(1+x^2)^2 \geq 1$ et $0 \leq g(x) \leq x^n$. En intégrant entre 0 et 1 (bornes dans l'ordre croissant), on trouve que

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on trouve par encadrement que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$

(b) Posons

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) = x^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut bien procéder à une IPP et

$$I_n = [\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)}]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx$$

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

(c) On a déjà vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, donc par somme avec la relation ci-dessus $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. De plus,

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} (1 + \frac{1}{4} J_{n+2})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{4} J_{n+2} = 1$, on en déduit que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$.

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i \\ &= \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \quad \text{car } -x \neq 1 \\ &= \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{1+x} \end{aligned}$$

(b) En intégrant entre 0 et 1 (fonctions continues),

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-x)^{k-1} dx &= \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left[-\frac{(-x)^k}{k} \right]_0^1 &= \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx
 \end{aligned}$$

(c) Soit $\epsilon \in]0, 1]$ et $J_\epsilon = \int_\epsilon^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

On pose $u = \sqrt{x}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$, strictement croissante sur cet intervalle, bijective de $[\epsilon, 1]$ sur $[\sqrt{\epsilon}, 1]$. Ce changement de variables est autorisé et

$$J_\epsilon = 2 \cdot \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{u^{2n+1}}{1+u^2} du$$

D'où, les fonctions intégrées étant continues sur $[0, 1]$, on obtient en passant à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 2 \cdot I_{2n+1}$$

Bilan : $\boxed{S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \cdot 2I_{n+1}}$

(d) D'après ce qui précède, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)}$

Remarque : il s'agit de la série harmonique alternée :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

(e) $S_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \cdot 2I_{2n+1}$. Comme $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$,

$$I_{2n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$$

Bilan : $\boxed{S_n - \ln(2) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}}$

Remarque : ce dernier résultat précise la vitesse de convergence de S_n vers $\ln(2)$.