Devoir d'entrainement d'analyse - septembre 2025

Exercice 1 : un développement en série entière

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

1. (a) Pour $x \in [0,1[$, calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1[$, $\varphi^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{4^n n!} \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[, \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

3. (a) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2k+2}{k+1} = \dfrac{2(2k+1)}{(k+1)} \dbinom{2k}{k}$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2n}{n} \leq 4^n$

4. Montrer que : $\forall x \in [0,1[, \forall t \in [0,x], 0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$

5. Déduire de ce qui précède que, pour tout $x \in [0,1[$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)dt = 0$

6. Montrer enfin que, pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme général $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$ converge et exprimer sa somme en fonction de x.

7. Ecrire en Python une fonction S qui renvoie $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$

Exercice 2 - intégrales et séries

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le réel défini par : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^n dt$

Soit x un réel, on se propose d'étudier la série de terme général $u_n(x) = a_n x^n$

1. **Etude de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

   (a) Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ 2t \leq 1+t^2 \leq 1+t$.

   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Donner la valeur de a_0. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n.$$

   (e) Ecrire en `Python` une fonction d'intitulé `def a(n):` qui donne a_n en fonction de n.

2. **Etude de l'absolue convergence de la série**

   Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente (on pourra distinguer les cas $|x| \geq 1$ et $|x| < 1$)

3. **Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.**

   Soit x un réel fixé, tel que $-1 \leq x < 1$.

   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in [0,1],\ 2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) > 0$$

   (b) Justifier l'existence de l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\, dt$

   (c) Soit n un entier naturel.

      i. Montrer que :
      $$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = f(x) - x^{n+1} \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^{n+1} dt.$$

      ii. En déduire que :
      $$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}.$$

   (d) Montrer enfin que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et expliciter sa somme en fonction de $f(x)$.

   (e) Ecrire en `Python` un programme calculant et affichant une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, où x et p sont donnés par l'utilisateur.