

Devoir d'entraînement d'analyse - septembre 2025

Exercice 1 : un développement en série entière

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie sur $[0, 1[$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

1. (a) Pour $x \in [0, 1[$, $\varphi(x) = (1-x)^{-1/2}$ et on en déduit que $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3/2}$ puis $\varphi''(x) = \frac{3}{4} \cdot (1-x)^{-5/2}$.
- (b) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : " \forall x \in [0, 1[, \varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}} "$$

- Initialisation : si $n = 0$, pour tout $x \in [0, 1[$, $\frac{0!}{4^0 0!} \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \varphi(x)$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ vraie :
pour tout $x \in [0, 1[$, $\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$. D'où en redérivant :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \frac{(2n)!}{4^n n!} \cdot \left(-\frac{2n+1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n n!} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+2}{2n+2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+3}{2}}} \\ &= \frac{(2n+1)!}{4^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+3}{2}}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à φ , entre 0 et x , à l'ordre n :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

soit avec les résultats de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

puisque $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \binom{2k}{k}$

3. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{2k+2}{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \binom{2k}{k} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \binom{2k}{k}$$

- (b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : $\mathcal{H}(n) : " \binom{2n}{n} \leq 4^n "$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

- Initialisation : si $n = 0$, $\binom{0}{0} = 1 = 4^0$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. D'après la question précédente :

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

On remarque que $\frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{2(2n+2)}{n+1} = 4$ et par H.R., $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.
D'où $\binom{2n+2}{n+1} \leq 4^{n+1}$ et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \leq 4^n$

4. Montrons que : $\forall x \in [0, 1[, \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$

Soit $x \in [0, 1[$ un réel fixé. On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ qui est définie sur $[0, x]$. Cette fonction est dérivable sur $[0, x]$ et pour tout $t \in [0, x]$, $f'(t) = \frac{-(1-t) + (x-t)}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} \leq 0$. Cette fonction est donc décroissante sur $[0, x]$. Comme $f(0) = x$ et $f(x) = 0$, on en déduit bien que $\forall x \in [0, 1[, \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$

5. Pour tout $x \in [0, 1[$, pour tout $t \in [0, x]$, on a dans un premier temps, d'après 1.(b) :

$$\begin{aligned} \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) &= \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} (n+1)!} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+3}{2}}} \\ &= \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-t)^{3/2}} \\ &\leq x^n \cdot 4^{n+1} \cdot \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1-t)^{3/2}} \text{ d'après 3.b et 4.} \\ &\leq (n+1) \cdot x^n \cdot \frac{1}{(1-t)^{3/2}} \end{aligned}$$

En intégrant, les bornes étant dans le bon sens ($0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt \leq (n+1) \cdot x^n \cdot \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{3/2}} dt$$

D'une part, $\int_0^x \frac{1}{(1-t)^{3/2}} dt$ ne dépend pas de n . D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot x^n = 0$: on reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée convergente (avec décalage d'indice) où $|x| < 1$ donc ce terme général tend vers 0. Par encadrement, on obtient le résultat souhaité.

$$\text{Bilan : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt = 0$$

6. D'après le 2.,

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k = \varphi(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

D'où d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k = \varphi(x)$.

Bilan : pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

```

7. def S(n,x):
    S=0
    a=1 #premier coeff de la somme
    X=1 #valeur de x**0
    S=a*X #premier terme de la somme
    for k in range(1,n+1):
        a=(2*k+1)/(2*(k+1))*a #on calcule le coeff suivant
        X=X*x #on calcule x**(k+1)
        S=S+a*X
    return S

```

Exercice 2 - intégrales et séries

1. Etude de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$ donc $1 + t^2 \leq 1 + t$.
De plus, $(t - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t \leq 1 + t^2$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$t^n \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}(1+t)^n$$

D'où en intégrant avec les bornes dans le bon sens ($0 < 1$) :

$$\int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \int_0^1 (1+t)^n dt$$

Or $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, et

$$\int_0^1 (1+t)^n dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1} - \frac{1}{2^n(n+1)}$$

d'où $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}}$

- (c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- (d) $a_0 = \int_0^1 1 dt = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt$.

Posons

$$\begin{cases} u(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1) \cdot t \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \\ v(t) = t \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left[t \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^2 \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\ &= 1 - 2(n+1) \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{2} \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\ &= 1 - 2(n+1) \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} + (n+1) \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \\ &= 1 - 2(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n}$

- (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} + \frac{n+1}{2n+3}a_n$. Donc aussi pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{n}{2n+1}a_{n-1}$.
D'où le programme suivant :

```

def a(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=1/(2*k+1)+k/(2*k+1)*u
    y=u

```

2. Etude de l'absolue convergence de la série

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{|x|^n}{n+1} \leq a_n |x|^n \leq \frac{2|x|^n}{n+1}$$

- Si $|x| \geq 1$ alors on obtient $\frac{1}{n+1} \leq \frac{|x|^n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq a_n |x|^n$.
Comme la série de t.g. $\frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique), par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de t.g. $|a_n x^n| = a_n |x|^n$ diverge.
- Si $|x| < 1$, alors la série de terme général $\frac{2|x|^n}{n+1}$ converge. En effet, $\frac{2|x|^n}{n+1} = o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$ par croissances comparées. Comme la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de t.g. $a_n |x|^n$ converge.

- Bilan :** la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $|x| < 1$

3. Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.

- (a) *Question pas si facile !! Si quelqu'un a trouvé plus efficace, je suis preneur !*

Soit $x \in [-1, 1[$ un réel fixé.

On remarque que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - xt^2 \geq 0$$

Considérons la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - xt^2$$

La fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée vaut $\varphi'(t) = -2xt$, du signe de $-x$.

- 1er cas :** si $x \geq 0$ alors

t	0	1
$\varphi'(t)$	-	
$\varphi(t)$	$\frac{1+x}{2}$	$\frac{1-x}{2}$

Ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \geq \frac{1-x}{2}$. Comme $x < 1$, $1-x > 0$ et donc $\varphi(t) \geq 0$.

- 2ème cas :** si $x < 0$ alors

t	0	1
$\varphi'(t)$	+	
$\varphi(t)$	$\frac{1+x}{2}$	$\frac{1-x}{2}$

Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \geq \frac{1+x}{2} \geq 0$ car $x \geq -1$.

- Finalement, dans les deux cas : $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \geq 0$, ce qui montre que

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], 2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x) > 0}$$

La deuxième inégalité étant évidente puisque $x < 1$.

- (b) D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, 1], 2 - x - xt^2 > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{2}{2-x-xt^2}$ est donc définie et continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet

intervalle. Par conséquent l'intégrale $f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt$ est bien définie.

- (c) Soit n un entier naturel.

i. Laissons nous "porter" par les calculs...

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)^k dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)^k dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)} dt \quad \text{car } \frac{x+xt^2}{2} \neq 1 \quad (\text{d'après le 3.a !}) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)} - \int_0^1 \frac{\left(\frac{x+xt^2}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{x+xt^2}{2}\right)} dt \quad \text{encore par linéarité} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt - x^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt \end{aligned}$$

ii. On en déduit que

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)| &= |x|^{n+1} \cdot \left| \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt \right| \\ &\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \left| \frac{2}{2-x-xt^2} \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \right| dt \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt \quad \text{car } 2-x-xt^2 > 0 \quad \text{d'après 3.(a)} \\ &\leq |x|^{n+1} \cdot \frac{4}{3(1-x)} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt \quad \text{car } 2-x-xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) \\ &\leq |x|^{n+1} \cdot \frac{4}{3(1-x)} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1} dt \quad \text{car } 1+t^2 \leq 1+t \quad \text{d'après 1.} \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1} dt = \left[2 \cdot \frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{2}{n+2} - 2 \cdot \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+2}} \leq \frac{2}{n+2}$$

D'où en reportant ci-dessus :

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)| &\leq |x|^{n+1} \cdot \frac{4}{3(1-x)} \cdot \frac{2}{n+2} \\ &\leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \end{aligned}$$

Il s'agit de bien gérer l'enchaînement des questions dans ce type de calcul !!!

- (d) Comme $|x| \leq 1$, on obtient

$$|f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)| \leq \frac{8}{3(n+2)(1-x)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{3(n+2)(1-x)} = 0$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_k(x) = f(x)$: la série de terme général $u_n(x)$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt$$

- (e) D'après la question précédente, l'écart entre $f(x)$ et $\sum_{k=0}^n u_k(x)$ est inférieur à $\frac{8}{3(n+2)(1-x)}$. D'où le programme suivant, pas si effrayant que ça, dans lequel on utilise la fonction `a` de la question 1.(e) :

```
x=float(input("Entrer x : "))
p=int(input("Entrer p : "))
S=0
n=0
while 8/(3*(n+2)*(1-x))>10^(-p) :
    n=n+1
    S=S+a(n)*x^n      #on rajoute le nouveau terme de la somme
print(S,"Valeur approchée de f(x) à 10^(-p) près : ")
```