

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats devront **encadrer** les résultats de leurs calculs.

**Exercice 1 : suites et équivalences**

1. Question préliminaire

On considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et de limite  $l$  et on pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ :

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

- (a) Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité  $b_n \leq a_n$ , puis étudier la monotonie de la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- (b) Montrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel  $l'$  qui vérifie  $l' \leq l$ .
- (c) Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité suivante :  $b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$
- (d) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

On se propose maintenant d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ .

- 2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et supérieur ou égal à 1 .
- (b) Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ , puis établir que la suite  $(u_n)$  diverge et donner sa limite.
- (c) Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle on a  $S_n > 1000$ .

```
n=1
u=1
S=1 #S1=u0=1
while ..... :
    u=.....
    S=.....
    n=n+1
print(n)
```

3. Recherche d'un équivalent de  $u_n$ .

- (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$ .
- (b) Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ , puis en déduire que la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- (c) Utiliser la première question pour établir que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ .

4. (a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $u_n$  puis en déduire un équivalent de  $S_n$  pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (b) Compléter le script Python suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2.c) sans calculer  $S_n$  :

```
n=0
u=1 #u0=1
while u<=..... :
    u=.....
    n=n+1
print(.....)
```

### Exercice 2 : calcul de l'intégrale de Gauss

1. Questions préliminaires

- (a) Justifier que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $e^u = 1 + u + \int_0^u (u-t).e^t.dt$ .
- (b) En déduire que pour tout  $u \in [-2, 2]$ ,  $0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{e^2}{2}.u^2$  (on pourra distinguer les cas  $u \geq 0$  et  $u < 0$ ).

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}.dt \text{ et } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$$

2. Justifier que  $f$  et  $g$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On souhaite montrer que  $x.f(x^2) = e^{-x^2} \cdot \int_0^x e^{-u^2}.du$  (\*).

- (a) Vérifier que (\*) est vraie si  $x = 0$ .
- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . A l'aide du changement de variables  $u = xt$  montrer l'égalité (\*).

4. (a) Justifier que  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) Calculer  $g(0)$ .
- (c) En encadrant  $g$ , prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .
- (d) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .

5. On considère le programme Python suivant :

```
import numpy as np
n=int(input("Entrer n : "))
A=np.arange(1,n+1,1)/n
T=np.ones([1,n])+A**2
S=np.mean(np.exp(-T)) #avec mean = moyenne
print(S)
```

Quelles sont les valeurs prises par les matrices A, T, S en fonction de  $n$  ?

Si  $n = 10000$ , quel est le but de ce programme ? Quelle est la méthode utilisée ? Justifier brièvement.

6. (a) Soit  $x_0$  un réel fixé. Prouver à l'aide du 1. qu'il existe un réel  $A(x_0)$  tel que :

$$\forall h \in [-1, 1], \quad 0 \leq g(x_0 + h) - g(x_0) + h \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt \leq A(x_0) \cdot h^2$$

- (b) En déduire que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que  $g' = -f$ .

7. Soit l'application  $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\Delta(x) = g(x^2) + \left(\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2$ .

Justifier que  $\Delta$  est constante et déterminer sa valeur.

8. En déduire la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^x e^{-u^2} du$ .

On peut donc dire que l'intégrale  $K = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$  converge et on obtient la valeur de

l'intégrale de Gauss :  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Problème : calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$**

Le but de ce problème est de démontrer la formule suivante:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et d'étudier une fonction définie par la somme d'une série.

**Partie I: calcul de la somme d'une série convergente**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que:

$$\int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

2. (a) Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)).$$

- (b) En déduire que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in ]0, \pi]$ :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(mt + \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

- (c) En déduire ensuite que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in ]0, \pi]$ :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit  $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

4. Soit  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in ]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

(a) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$ .

(b) Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = \frac{1}{2\pi}$ .

On admet que  $f'$  est continue en 0. Il en résulte que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

5. (a) Montrer:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt.$$

(b) Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et montrer:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

(c) Proposer un programme **Python** qui demande à l'utilisateur un réel  $\varepsilon > 0$  et qui calcule le plus petit entier  $N$  tel que  $\left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| < \varepsilon$ .

## Partie II: étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$  et en déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$  converge.

On note  $S$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , par  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ .

(b) Calculer  $S(0)$  et  $S(1)$ .

2. Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$  convergent.

3. (a) Établir:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

(b) En déduire:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|.$$

(c) Montrer alors que la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. (a) Montrer, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+$  tels que  $x \neq y$ :

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(b) En déduire que la fonction  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

(c) Préciser les valeurs de  $S'(0)$  et  $S'(1)$ .