Corrigé du DS n° 1

Exercice 1 : suites et équivalences (Edhec 2021)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ on a par croissance de la suite :

$$a_k \leqslant a_n$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_n \quad \text{autrement dit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$$

En divisant par n qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_n$$

On a bien établi :

$$\boxed{b_n \leqslant a_n}$$

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1} - b_n$. On remarque que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1}\times\left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n$$

On a donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant 0}\times\underbrace{(a_n - b_n)}_{\geqslant 0} \quad \text{donc} \quad \boxed{b_{n+1} - b_n \geqslant 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

(b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel ℓ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \leqslant \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leqslant a_n$. On a donc :

$$b_n \leqslant \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{majorée}}$ De plus, elle est $\boxed{\text{croissante}}$ (question 1.a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note ℓ'. Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité

$$b_n \leqslant \ell$$

on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n}\times\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![n; 2n-1]\!]$ on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geqslant a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}$$

(d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

De plus on a établi en question 1.b l'inégalité $\ell' \leqslant \ell$. On en déduit que : $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

2. (a) On raisonne par récurrence sur n.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: "u_n est bien défini et $u_n \geq 1$".

- Initialisation : pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geqslant 1$ et $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est bien défini et que : $u_n \geqslant 1$. On a : $u_n^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geqslant 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc $\boxed{\text{bien défini}}$ (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$:

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ On a donc deux possibilités :

1) soit cette suite converge
2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \quad \text{donc} \quad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \quad \text{donc} \quad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement : $c \geqslant 1$.

On obtient la contradiction suivante : $0 \geqslant 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle $\boxed{\text{diverge vers } +\infty}$

(c)

```
n=1
u=1
S=1
while S<=1000:
    u=sqrt(u^2+u)
    S=S+u
    n=n+1
print(n)
```

Remarque Comme $S_n \geqslant u_{n-1}$, S_n tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle while s'arrêtera.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n\right) \times \left(\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n\right)}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{\sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par u_n (licite car $u_n > 0$) on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1}$$

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$ donc par continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}}$$

Remarque On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1} - u_n = u_n \times \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} - 1\right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ à $x = \dfrac{1}{u_n}$.

(b) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) \times \left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} \left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) \times \left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) &= (2x+1)^2 - \left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 \\ &= 4x^2+4x+1-4(x^2+x) = 1 > 0 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\boxed{f'(x) > 0}$ Ceci prouve que

la fonction f est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[1;+\infty[$

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (question 2.b). Par croissance de la fonction f on en déduit :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

(c) On applique le raisonnement de la question 1 avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente (3.a). On sait d'après 1.d que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers } 0} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}}$

4. (a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n \Leftrightarrow u_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$$

On en déduit par télescopage que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2 - 1$$

On cherche maintenant un équivalent de S_n en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers 1}} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers 0}} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leqslant 1000 \iff u_n^2 - 1 \leqslant 1000 \iff u_n^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$$

(on a utilisé la stricte croissance de la fonction racine carrée). D'où le programme suivant :

```
n=0
u=1
while u<=np.sqrt(1001):
    u=np.sqrt(u^2+u)
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 2 : calcul de l'intégrale de Gauss

1. Questions préliminaires

(a) Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à exp, à l'ordre 1, entre 0 et u :

$$\exp(u) = \exp(0) + \exp'(0).u + \int_0^u (u-t).\exp''(t)dt$$

ce qui donne bien : $\boxed{e^u = 1 + u + \int_0^u (u-t).e^t.dt}$

(b) Soit $u \in [-2, 2]$.
D'après le 1.(a), $e^u - 1 - u = \int_0^u (u-t).e^t.dt$.

- **1er cas : si** $u \in [0, 2]$
Pour tout $t \in [0, u]$, $(u-t).e^t \geq 0$ donc $\int_0^u (u-t).e^t\,dt \geq 0$ (bornes bon sens $u \geq 0$).
De plus $(u-t).e^t \leq (u-t).e^2$, d'où en intégrant (bornes bon sens encore) :

$$\int_0^u (u-t).e^t \leq e^2.\int_0^u (u-t)\,dt = e^2.[-\frac{(u-t)^2}{2}]_0^u = \frac{u^2}{2}.e^2$$

- **2ème cas : si** $u \in [-2, 0]$
Pour tout $t \in [u, 0]$, $(u-t).e^t \leq 0$, donc $\int_u^0 (u-t).e^t\,dt \leq 0$ d'où $\int_0^u (u-t).e^t\,dt \geq 0$.
Pour tout $t \in [u, 0]$, $e^t \leq e^2$ donc $(u-t).e^t \geq (u-t).e^2$ car $u - t < 0$. En intégrant avec les bornes "dans le mauvais sens" : $\int_0^u (u-t).e^t \leq e^2.\int_0^u (u-t)\,dt = \frac{u^2}{2}.e^2$ (cf calcul précédent).

- Conclusion : pour tout $u \in [-2, 2]$, on a bien

$$0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{e^2}{2}.u^2$$

On considère les fonctions suivantes

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ où } f(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}.dt \text{ et } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ où } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Les fonctions $t \mapsto e^{-x.(1+t^2)}$ et $t \mapsto \frac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}$ sont continues sur $[0, 1]$ donc les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ sont bien définies.
Finalement $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont définies sur } \mathbb{R}}$

3. (a) Si $x = 0$, l'égalité demandée est évidente puisque $x.f(x^2) = 0$ et $e^{-x^2}.\int_0^0 e^{u^2}du = 0$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$x.f(x^2) = x.\int_0^1 e^{-x^2.(1+t^2)}.dt = x.e^{-x^2}.\int_0^1 e^{-x^2.t^2}.dt = x.e^{-x^2}.\int_0^1 e^{-(xt)^2}.dt$$

On procède par changement de variables en posant $u = xt$. Comme $x \neq 0$, il s'agit d'un changement de variables affine non constant donc autorisé.
Bornes

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \to \begin{cases} u = 0 \\ u = x \end{cases}$$

$du = x\ dt$.
Donc par changement de variables,

$$\int_0^1 e^{-(xt)^2}.dt = \frac{1}{x}.\int_0^x e^{-u^2}du$$

et

$$\boxed{x.f(x^2) = e^{-x^2}.\int_0^x e^{-u^2}du}$$

4. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x \leq y$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Rightarrow \quad -(1+t^2).y \leq -(1+t^2).x \text{ car } -(1+t^2) \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad e^{-(1+t^2).y} \leq e^{-(1+t^2).x} \text{ car la fonction exp est croissante sur } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad \frac{e^{-(1+t^2).y}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-(1+t^2).x}}{1+t^2} \text{ car } 1+t^2 > 0 \end{aligned}$$

D'où par croissance de l'intégrale (bornes bon sens $0 < 1$) :

$$\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2).y}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2).x}}{1+t^2}\,dt$$

donc $g(y) \leq g(x)$.
Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}}$.

(b)

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [Arctan(t)]_0^1 = Arctan(1) - Arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

(c) Soit $x>0$. Il est clair que $g(x)\geq 0$ (fonction positive, bornes bon sens).
Pour tout $t\in\ [0,1]$, $\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\leq e^{-x(1+t^2)}\leq e^{-x}$.
D'où en intégrant (BBS) : $g(x)\leq\int_0^1 e^{-x}.dt=e^{-x}$.
Ainsi $0\leq g(x)\leq e^{-x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ par encadrement $\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$

(d) Soit $x<0$. Pour tout $t\in[0,1]$, $(1+t^2)\geq 1$ donc $e^{-x.(1+t^2)}\geq e^{-x}$. Puis $\frac{e^{-x}}{1+t^2}\geq\frac{e^{-x}}{2}$.
Donc
$$g(x)\geq\int_0^1\frac{e^{-x}}{2}dt=\frac{e^{-x}}{2}$$
Comme $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty$, par entrainement $\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty}$

5. La matrice A est égale à :
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & 1\end{pmatrix}$$
puis
$$\begin{aligned}T&=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\frac{1}{n})^2&(\frac{2}{n})^2&\cdots&(\frac{n-1}{n})^2&1^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+(\frac{1}{n})^2&1+(\frac{2}{n})^2&\cdots&1+(\frac{n-1}{n})^2&1+(\frac{n}{n})^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$
et enfin
$$S=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(-(1+(\frac{k}{n})^2))=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h(\frac{k}{n})$$
où $h:t\mapsto\exp(-(1+t^2))$.
Oon reconnait des sommes de Riemann (méthode des rectangles) associée à la fonction continue h sur l'intervalle $[0,1]$. Le but de ce programme est donc de calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 e^{-(1+t^2)}dt=f(1)$. Lorsque n est grand ($n=10000$ par exemple), on obtient une valeur approchée de cette intégrale.

6. (a) *Question plus délicate !! Mais assez classique.*
Il va falloir utiliser finement les questions précédentes.
Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et $h\in[-1,1]$. Alors
$$\begin{aligned}&g(x_0+h)-g(x_0)+h\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt\\=&\int_0^1\frac{e^{-(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt-\int_0^1\frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt+h\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt\\=&\int_0^1\frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}.e^{-h(1+t^2)}\,dt-\int_0^1\frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt+h\int_0^1\frac{(1+t^2).e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}dt\\=&\int_0^1\frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}.(e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2))\,dt\text{ par linéarité de l'intégrale}\end{aligned}$$
Comme $h\in[-1,1]$ et $t\in[0,1]$, $-h(1+t^2)\in[-2,2]$. On a donc le droit d'utiliser le 1.(b) avec $u=-h(1+t^2)$:
$$0\leq e^{-h(1+t^2)}-1-(-h(1+t^2))\leq\frac{e^2}{2}.(-h(1+t^2))^2$$
d'où
$$0\leq\frac{e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)}{1+t^2}\leq\frac{e^2}{2}.h^2.(1+t^2)$$
et donc
$$0\leq\frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}.(e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2))\leq h^2.\frac{e^2}{2}.(1+t^2).e^{-x_0(1+t^2)}$$
D'où en intégrant entre 0 et 1 (bornes bon sens) :

$$\boxed{0\leq g(x_0+h)-g(x_0)+h\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt\leq h^2.A(x_0)}$$
où $A(x_0)=\frac{e^2}{2}.\int_0^1(1+t^2).e^{-x_0(1+t^2)}\ dt$.
Ne pas essayer de calculer cette intégrale !!

(b) *On revient sur une question plus abordable !*
Soit $x_0\in\mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $h\in[-1,1]\setminus\{0\}$,
$$0\leq|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt|\leq|h|.A(x_0)$$
Attention : $\frac{h^2}{|h|}=|h|$
Comme $\lim_{h\to0}|h|.A(x_0)=0$, on obtient par encadrement :
$$\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=-\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt=-f(x_0)$$
Ainsi $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } g'(x_0)=-f(x_0)}$
<u>Conclusion :</u> $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g'=-f}$

7. L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition $x\mapsto g(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $x\mapsto\int_0^x e^{-u^2}.du$ est une primitive de $x\mapsto e^{-x^2}$, donc cette fonction est dérivable également. Finalement Δ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme, produit de fonctions dérivables.
D'où $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$\Delta'(x)=2x.g'(x^2)+2.\int_0^x e^{-u^2}du.e^{-x^2}=-2x.f(x^2)+2.e^{-x^2}.\int_0^x e^{u^2}du=0$$
d'après le 3.
Enchainement des questions encore !!!
Donc la fonction Δ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $\Delta(0)=g(0)=\frac{\pi}{4}$, on en déduit enfin que
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \Delta(x)=\frac{\pi}{4}}$$

8. On remarque que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,
$$\int_0^x e^{-u^2}.du=\sqrt{\Delta(x)-g(x^2)}=\sqrt{\frac{\pi}{4}-g(x^2)}$$
Comme $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, on obtient que
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}.du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
Donc l'intégrale $K=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}.du$ est convergente et
$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-u^2}.du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad\text{(intégrale de Gauss)}}$$

Problème : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Partie I: calcul de la somme d'une série convergente

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède à une intégration par parties en posant

$$u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t \quad \rightsquigarrow \quad u'(t) = \frac{1}{\pi}t - 1$$
$$v'(t) = \cos(nt) \quad \rightsquigarrow \quad v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt).$$

Cela est bien légitime puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt &= \underbrace{\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0-0=0} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}t - 1\right)\sin(nt)dt \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}t - 1\right)\sin(nt)dt.\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on intègre de nouveau par parties en posant

$$u(t) = \frac{1}{\pi}t - 1 \quad \rightsquigarrow \quad u'(t) = \frac{1}{\pi}$$
$$v'(t) = \sin(nt) \quad \rightsquigarrow \quad v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et l'on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\pi}t - 1\right)\sin(nt)dt &= \left[-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\pi}t - 1\right)\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0 \text{ car } n \in \mathbb{N}} \\ &= -\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien $\boxed{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.}$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. D'après les formules de trigonométrie, on a

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

d'où, en soustrayant ces égalités,

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b)$$

et donc $\boxed{\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)).}$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m \cos(nt)\sin(\frac{t}{2}) &= \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^m \sin(nt + \frac{t}{2}) - \sum_{n=1}^m \sin(nt - \frac{t}{2})) \text{ d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^m \sin(nt + \frac{t}{2}) - \sum_{k=0}^{m-1} \sin(kt + \frac{t}{2})) \text{ en posant } k = n-1 \\ &= \frac{1}{2}\sin(mt + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}) \text{ par télescopage}\end{aligned}$$

(c) On a donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m \cos(nt)\sin(\frac{t}{2}) &= \frac{1}{2}(\sin(mt + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\frac{mt+t}{2} + \frac{mt}{2}) - \sin(\frac{mt+t}{2} - \frac{mt}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\cos(\frac{(m+1)t}{2})\sin(\frac{t}{2}) \text{ d'après } 2.a\end{aligned}$$

En divisant par $\sin(\frac{t}{2})$, qui est strictement positif car $t \in]0, \pi]$, on obtient alors

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. Il s'agit du fameux *lemme de Lebesgue* que nous avons vu en TD. Si vous n'avez pas réussi à le redémontrer, il faut absolument savoir le faire pour la prochaine fois où ce résultat apparaitra !

Soit $u\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\lambda > 0$. On effectue une intégration par parties en posant

$$f(t) = u(t) \quad \rightsquigarrow \quad f'(t) = u'(t)$$
$$g'(t) = \sin(\lambda t) \quad \rightsquigarrow \quad g(t) = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t).$$

Cela est légitime car f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt &= \left[\frac{-u(t)}{\lambda}\cos(\lambda t)\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}(-u(\pi)\cos(\lambda\pi) + u(0)) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)dt.\end{aligned}$$

Cela dit, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$, donc u et u' sont bornées sur ce segment. Il existe donc M_1 et $M_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$|u(t)| \leqslant M_1 \text{et} \left|u'(t)\right| \leqslant M_2.$$

On en déduit en particulier (en majorant $|\cos|$ par 1) que

$$|-u(\pi)\cos(\lambda\pi) + u(0)| \leqslant 2M_1$$

et

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \left|u'(t)\cos(\lambda t)\right| \leqslant M_2$$

et donc, avec l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(2M_1 + \pi M_1).$$

On en déduit, avec le théorème des gendarmes, que $\boxed{\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ par opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (vous devez le décortiquer un peu).

(b) Il s'agit d'étudier la limite en 0^+ du taux d'accroissement $\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$. Pour tout $t \in]0,\pi]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} &= \frac{\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-(-1)}{t}\\ &= \frac{\frac{t^2}{2\pi}-t+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Cherchons un équivalent de ce quotient.
Pour le dénominateur, on a $2t\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} 2t\times\frac{t}{2} = t^2$. Pour le numérateur on écrit au voisinage de 0:

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = t + o_{t\to 0}\big(t^2\big)$$

d'où

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{2\pi} + o_{t\to 0}\big(t^2\big).$$

Ainsi, $\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t^2}{2\pi}$. Finalement,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2\pi}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2\pi}.}$

5. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après 1 et la linéarité de l'intégrale, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{m} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)dt,$$

puis, avec 2c,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \int_0^{\pi} 2f(t)\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)dt.$$

Avec la formule de 2a, on aboutit à

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} &= \int_0^{\pi} 2f(t)\left(\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)dt\\ &= -\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)dt.\end{aligned}$$

Or, pour $t \in]0,\pi]$, $f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}$, donc

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \int_0^{\pi} \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^3}{12\pi} - \frac{t^2}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

On obtient ainsi *in fine*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)dt.}$$

(b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, le lemme de Lebesgue (cf. 3) s'applique et assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)dt = 0.$$

Il en résulte, d'après l'égalité de la question précédente, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donc, par définition de la convergence d'une série numérique, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

(c)
```
eps=float(input("epsilon= "))
n=0
s=0
while  np.abs(s-(np.pi**2/6))>=eps:
    n=n+1
    s=s+1/n^2
print(n)
```

Partie II: étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.}$ Or $\frac{x}{n^2} \geqslant 0$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) donc la série de t.g. $\frac{x}{n^2}$ l'est aussi puis par critère d'équivalence (séries à termes positifs),

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \text{ converge.}}$$

(b) On a $\boxed{S(0) = 0}$ (c'est la somme de la série de terme général nul) et $\boxed{S(1) = 1}$ car pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a via un télescopage,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ et } \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

Le théorème de comparaison (version avec $\sim$) assure (ici, on compare avec des séries de Riemann convergentes) que $\boxed{\text{les séries proposées sont convergentes.}}$

3. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y-x}{(n+x)(n+y)} \\ &= (y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}}$

(b) On en déduit que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$|S(y) - S(x)| = |y-x| \times \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

Or $\frac{1}{(n+x)(n+y)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ car $x, y \geqslant 0$, donc

$$|S(y) - S(x)| \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

d'où $\boxed{|S(y) - S(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x|.}$

(c) On fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et, dans l'inégalité obtenue ci-dessus, on fait tendre y vers x. Le théorème des gendarmes assure que $|S(y) - S(x)| \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0$ et donc que $S(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} S(x)$.

Autrement dit, S est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$, donc $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

4. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \neq y$. En utilisant 3a on a

$$\begin{aligned} \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x-y}{(n+x)^2(n+y)} \\ &= (x-y)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| = |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

puisque $(n+x)^2(n+y) \geqslant n^3$ (car $x, y \geqslant 0$). Ainsi,

$$\boxed{\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

(b) On utilise la même méthode qu'en 3c: on fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et on fait tendre y vers x. Le théorème des gendarmes montre que le taux d'accroissement $\frac{S(x)-S(y)}{x-y}$ tend vers $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$ lorsque $y \to x$, donc $\boxed{S \text{ est dérivable en } x}$ et $\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.}$

(c) D'après la question précédente, on a $\boxed{S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ et $\boxed{S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$