Corrigé du DM n° 1

Exercice 1 : exercice EDHEC 2025 - tout nouveau !!!

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables. En appliquant la formule du quotient, on a

$$g'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Le signe de $g'(x)$ dépend donc de celui de $1 - \ln x$ puisque $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$.
Cherchons les valeurs pour lesquelles

$$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e.$$

Ainsi :
- Pour $x \in]0, e[$, on a $g'(x) > 0$.
- Pour $x \in]e, +\infty[$, $g'(x) < 0$.

Déterminons les limites de g.
- Lorsque $x \to 0^+$, on a $\ln x \to -\infty$ et $x \to 0^+$. Donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

- Lorsque $x \to +\infty$, par croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

On calcule :

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

D'après les résultats précédents, le tableau de variations de g est le suivant :

x	0^+		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(b) Pour $k \geq 3$, on remarque que $3 > e$. Or, nous avons établi que pour $x > e$, la fonction $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est strictement décroissante. Ainsi, pour tout entier $k \geq 3$,

$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{\ln(k+1)}{k+1},$$

ce qui montre que $\boxed{\text{la suite } \left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k \geq 3} \text{ est décroissante.}}$

De plus, pour tout $k \geq 4$, on a :

$$\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 4}{4}.$$

Or, comme

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2},$$

on peut écrire :

$$\boxed{\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2} \quad \text{pour tout } k \geq 4.}$$

2. (a) Pour $x > n$, la fonction f_n est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. On calcule alors

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \ln x + (x-n)\frac{1}{x} - \ln(x-n) - x\frac{1}{x-n} \\ &= \ln x + 1 - \frac{n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n} \\ &= \ln x - \ln(x-n) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n} \end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n}}$$

(b) Nous souhaitons démontrer que

$$\ln t \leq t - 1, \quad \forall t > 0.$$

Pour ce faire, nous utilisons la propriété de concavité de la fonction logarithme. Nous savons que ln est concave sur $]0; +\infty[$. Ainsi, ln est en dessous de toute ces tangentes, notamment la tangente au point 1.
L'inégalité de concavité nous donne donc :

$$\ln t \leq \ln 1 + \frac{1}{1}(t-1) = t - 1, \quad \forall t > 0.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\boxed{\ln t \leq t - 1, \quad \forall t > 0,}$$

On veut montrer que $f_n'(x) < 0$ pour $x > n$. Posons $t = \frac{x}{x-n} > 1$ (car $x > n$). Alors

$$f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n} = \ln t + 1 - \frac{n}{x} - t$$

Il suffit de montrer que cette expression est négative. D'après l'inégalité $\ln t \leq t - 1$:

$$\ln t \leq t - 1 \implies \ln t + 1 - t \leq 0$$

Comme $-\frac{n}{x} < 0$, on a bien $f_n'(x) < 0$.

$\boxed{\text{Donc } f_n \text{ est strictement décroissante sur }]n, +\infty[.}$

(c) Soit $n \geq 2$. Nous avons déjà montré que f_n est continue et strictement décroissante sur $[n+1, n+2]$. D'après le théorème de la bijection, f est donc bijective de $[n+1, n+2]$ dans $[f(n+2), f(n+1)]$.

Calculons $f_n(n+1)$ et $f_n(n+2)$:

$$f_n(n+1) = (n+1-n)\ln(n+1) - (n+1)\ln(1) = \ln(n+1)$$

$$f_n(n+2) = (n+2-n)\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2$$

Pour $n \geq 2$, $f_n(n+1) > 0$ (car $n+1 \geq 3 > 1$). De plus, en utilisant la question 1.b), comme $n \geq 2 \Rightarrow (n+2) \geq 4$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2} &\Leftrightarrow 2\ln(n+2) \leq (n+2)\ln(2) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow f_n(n+2) \leq 0\end{aligned}$$

Comme $0 \in [f_n(n+2), f_n(n+1)]$,

$$\boxed{\text{il existe une unique solution } x_n \in [n+1, n+2] \text{ telle que } f_n(x_n) = 0.}$$

3. Nous avons montré à la question précédente que

$$n+1 \leq x_n \leq n+2 \Longleftrightarrow \frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$, ce qui montre

$$\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n.}$$

4. (a) Par définition, $f_n(x_n) = 0$:

$$\begin{aligned}(x_n - n)\ln x_n - x_n \ln(x_n - n) = 0 &\implies (x_n - n)\ln x_n = x_n \ln(x_n - n) \\ &\implies \frac{(x_n - n)\ln x_n}{x_n} = \ln(x_n - n)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}.}$$

(b) Comme $x_n \sim n$, on se doute que la limite de $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$ est 0 mais on ne peut pas invoquer directement une croissance comparée.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x_n)}{x_n} &= \frac{\ln\left(n\frac{x_n}{n}\right)}{x_n} \\ &= \frac{\ln(n)}{x_n} + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n} \\ &= \frac{\ln(n)}{n} \times \frac{n}{x_n} + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = 1$ par équivalence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Donc par quotient, produit et somme de limite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0}$$

Utilisons la relation précédente :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}$$

Remarquons que pour $n \geq 2$, $1 \leq x_n - n \leq 2$. On a donc l'inégalité

$$|\ln(x_n - n)| \leq 2\frac{\ln x_n}{x_n}$$

D'après le résultat précédent et le théorème d'encadrement, la suite $(\ln(x_n - n))_{n\geq 2}$ converge vers 0. En composant par l'exponentielle, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1}$$

5. (a) On remarque à l'aide de la question précédente que $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. En utilisant les relation d'équivalence usuelles,

$$\boxed{\ln(1+u_n) \sim_{n\to+\infty} u_n.}$$

Remarquons d'abord que puisque $u_n \to 0$, on a l'équivalence :

$$1 + n + u_n \sim n \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

En effet, la contribution de 1 et celle de u_n sont négligeables devant n pour n grand. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1+n+u_n}{n} \to 1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

puis

$$\ln(1+n+u_n) = \ln n + \ln\left(\frac{1+n+u_n}{n}\right) \sim \ln n,$$

puisque

$$\ln\left(\frac{1+n+u_n}{n}\right) \to \ln 1 = 0.$$

Nous avons ainsi justifié que

$$\boxed{\ln(1+u_n) \sim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1+n+u_n) \sim_{n\to+\infty} \ln n.}$$

(b) D'après la question 4.(a) :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}$$

Comme $x_n - n = 1 + u_n$, nous avons montré à la question 5.(a) les résultats $\ln(x_n - n) \sim u_n$ et $\ln x_n \sim \ln n$. Nous avons enfin démontré que $x_n \sim n$ (question 3) et que $x_n - n \sim 1$ (question 4.(b)). En utilisant tout ces résultats

$$u_n \sim \ln(x_n - n) \sim (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n} \sim 1 \times \frac{\ln(n)}{n}$$

Par transitivité des équivalents,

$$\boxed{u_n \sim \tfrac{\ln n}{n}.}$$

6. D'après la question précédente,

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Pour tout $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$ donc $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de t.g. $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge. Finalement, par critère d'équivalence (séries à termes positifs), on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ diverge.}}$$

Comme $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$, on a en élevant au carré :

$$u_n^2 \sim \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 = \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

Pour étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n^2$, nous étudierons la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$.

Nous avons

$$\frac{(\ln(n))^2}{n^2} \times n^{3/2} = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} = 0$ par croissance comparée. Donc $\displaystyle\frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$. Par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$$

converge. Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs on en déduit :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n^2 \text{ converge.}}$$

Exercice 2 : étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie A. Etude d'une suite d'intégrales

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 (\ln(t))^n \, dt$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(t))^n$ est continue sur $[1, 2]$, donc I_n existe.

$$I_0 = \int_1^2 dt = 1$$

$$I_1 = \int_1^2 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1$$

Remarque : retenir que $t \mapsto \ln(t)$ a pour primitive $t \mapsto t\ln(t) - t$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [1, 2]$,

$$1 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln(t) \leq \ln(2) < 1$$

puisque $\ln(2) \simeq 0,7$. Donc $(\ln(t))^{n+1} \leq (\ln(t))^n$. D'où en intégrant (avec $1 < 2$); $I_{n+1} \leq I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale (avec $1 < 2$). Etant décroissante et minorée par 0, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $(\ln(t))^n \leq (\ln(2))^n$, en intégrant on obtient que

$$0 \leq I_n \leq \int_1^2 (\ln(2))^n dt = (\ln(2))^n$$

Comme $|\ln(2)| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2))^n = 0$, donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

2. Posons

$$\begin{cases} u(t) = (\ln(t))^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = (n+1).\frac{1}{t}.(\ln(t))^n \\ v(t) = t \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$. On peut donc procéder à une IPP.

$$I_{n+1} = [t.(\ln(t))^{n+1}]_1^2 - (n+1).\int_1^2 (\ln(t))^n dt = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n$$

On a donc bien

$$\boxed{I_{n+1} = [t.(\ln(t))^{n+1}]_1^2 - (n+1).\int_1^2 (\ln(t))^n dt = 2.(\ln(2))^{n+1} - (n+1).I_n}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
(1) Posons $u = \ln(t)$
(2) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$, strictement croissante et bijective de $[1, 2]$ sur $[0, \ln(2)]$.
(3) Bornes : $\begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases} \to \begin{cases} u = \ln(2) \\ u = 0 \end{cases}$
(4) $du = \frac{1}{t}dt$ et comme $t = e^u$, $dt = e^u du$

Par changement de variables, on a bien $\boxed{I_k = \int_0^{\ln(2)} u^k.e^u du}$

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} I_k &= \int_0^{\ln(2)} e^u.\sum_{k=0}^{n} u^k du \text{ par linéarité de l'intégrale}\\ &= \int_0^{\ln(2)} e^u.\frac{1-u^{n+1}}{1-u}du\\ &= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du - \int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du\end{aligned}$$

D'où

$$|\sum_{k=0}^{n} I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du| = |\int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du|$$

Puis ensuite :

$$\begin{aligned}|\int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du| &\leq \int_0^{\ln(2)} |\frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}|du \text{ par inégalité triangulaire}\\ &\leq \int_0^{\ln(2)} \frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du \text{ car tout est positif}\end{aligned}$$

Pour tout $u \in [0, \ln(2)]$, on a $e^u \leq e^{\ln(2)} = 2$, $\frac{1}{1-u} \leq \frac{1}{1-\ln(2)}$ et $u^{n+1} \leq (\ln(2))^{n+1}$. D'où

$$\frac{u^{n+1}.e^u}{1-u} \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+1}}{(1-\ln(2))}$$

puis en intégrant (avec $0 \leq \ln(2)$) :

$$|\frac{0}{\ln(2)}\frac{u^{n+1}.e^u}{1-u}du| \leq \int_0^{\ln(2)} 2.\frac{(\ln(2))^{n+1}}{(1-\ln(2))}du = 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}$$

<u>Bilan :</u> pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|\sum_{k=0}^{n} I_k - \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du| \leq 2.\frac{(\ln(2))^{n+2}}{(1-\ln(2))}}$

(c) Comme $|\ln(2)| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2))^{n+2} = 0$. D'où par encadrement, $\lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} I_k \text{ est convergente et } S = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^u}{1-u}du}$

(d) D'après ce qui précède, la suite $(\sum_{k=0}^{n} I_k)$ fournit une suite d'approximations de l'intégrale A. Voici donc un programme Python qui convient :

```
import numpy as np
I=1
S=1
n=0
while 2*((np.log(2))**(n+2)))/(1-np.log(2)) > 1/100:
   I=2*(np.log(2))**(n+1)-(n+1)*I
   n=n+1
   S=S+I
print("Valeur approchée de A:", S)
```


On obtient $A \simeq 1.82$ à 10^{-2} près.

Partie B. Etude d'une suite de fonctions définies par des intégrales

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction G_n telle que

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ G_n(x) = \int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x+t)\ dt$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier qui est fixé dans cette question.
Soit $x \in [0; +\infty[$. La fonction $t \mapsto (\ln(t))^n.\ln(x+t)$ est continue sur $[1, 2]$, donc l'intégrale $\int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x+t)\ dt$ est bien définie et $G_n(x)$ existe.
Finalement, comme pour tout $x \in [0; +\infty[$, $G_n(x)$ existe, on peut dire que G_n est bien définie sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $(x, y) \in [0; +\infty[^2$ avec $x \leq y$, pour tout $t \in [1, 2]$, on a $\ln(x+t) \leq \ln(y+t)$ par croissance de la fonction ln. D'où

$$(\ln(t))^n.\ln(x+t) \leq (\ln(t))^n.\ln(y+t)$$

puis en intégrant avec les bornes dans le bon sens, $G_n(x) \leq G_n(y)$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la fonction } G_n \text{ est définie sur } [0; +\infty[\text{ et croissante sur cet intervalle}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La fonction ln est dérivable sur $[1; +\infty[$, et $\forall x \in [1; +\infty[$, $|\ln'(x)| = |\frac{1}{x}| \leq 1$. On en déduit d'après l'inégalité des accroissements finis que :
pour tout $(a, b) \in [1; +\infty[$, $|\ln(a) - \ln(b)| \leq |a - b|$.
Soit $(x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$ et $t \in [1, 2]$. En appliquant le résultat précédent avec $a = x_2 + t$ et $b = x_1 + t$, qui appartiennent bien à $[1; +\infty[$:

$$|\ln(x_2+t) - \ln(x_1+t)| \leq |(x_2+t) - (x_1+t)| = |x_2 - x_1|$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{\forall (x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2, \forall t \in [1, 2], |\ln(x_2+t) - \ln(x_1+t)| \leq |x_2 - x_1|}$

(b) On travaille de proche en proche. Pour tout $(x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2$,

$$\begin{aligned}|G_n(x_2) - G_n(x_1)| &= |\int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x_2+t)\ dt - \int_1^2 (\ln(t))^n.\ln(x_1+t)\ dt|\\ &\leq |\int_1^2 (\ln(t))^n.(\ln(x_2+t).\ln(x_1+t))\ dt| \text{ par linéarité de l'intégrale}\\ &\leq \int_1^2 (\ln(t))^n.|\ln(x_2+t).\ln(x_1+t)|\ dt \text{ par inégalité triangulaire,}\\ &\quad \text{et avec } \ln(t)^n \geq 0\\ &\leq |x_2 - x_1|.\int_1^2 (\ln(t))^n dt\\ &\leq |x_2 - x_1|.I_n\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in [0; +\infty[^2,\ |G_n(x_2) - G_n(x_1)| \leq I_n.|x_2 - x_1|}$$

(c) Très très classique !!!
Soit $x_0 \in [0; +\infty[$. D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$|G_n(x) - G_n(x_0)| \leq I_n.|x - x_0|$$

Comme $\lim_{x\to x_0} I_n.|x - x_0| = 0$, par encadrement on a $\lim_{x\to x_0} G_n(x) = G_n(x_0)$.
On en déduit que G_n est continue en x_0, et ceci quel que soit $x_0 \in [0; +\infty[$.

Bilan : $\boxed{G_n \text{ est continue sur } [0; +\infty[}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, pour tout $t \in [1, 2]$, $\ln(x + t) \geq \ln(x)$, d'où $\ln(t)^n . \ln(x + t) \geq \ln(t)^n . \ln(x)$. D'où par croissance de l'intégrale ($1 < 2$): $G_n(x) \geq \ln(x).I_n$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x).I_n = +\infty$, on trouve finalement que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G_n(x) = +\infty}$