

Devoir Maison en auto-correction. Un corrigé sera posté le lundi 29/09

Exercice 1 : endomorphismes nilpotents en dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle et f un endomorphisme non nul de E . On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k termes f) et $f^0 = Id_E$.

- On dit que f est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- On dit que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si l'on a $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{m-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que si f est nilpotent, alors f n'est pas bijectif.

2. Un premier exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique (e_1, e_2) .

- Vérifier que f est nilpotent et préciser son indice.
- Justifier que $Im(f) = Ker(f)$ et en préciser une base.

3. Un deuxième exemple : E est de dimension 2 et muni d'une base $\mathcal{C}$.

Soit f un endomorphisme non nul de E de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$. On suppose que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$.

- Justifier que $ad - bc = 0$ et calculer $A^2 - (a + d)A$.
- En déduire que $m = 2$.
- Justifier que $Im(f) \subset Ker(f)$ et établir que $rg(f) = 1$ puis conclure que $Ker(f) = Im(f)$.
- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}'$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$A' = Mat_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On suppose ici que f est non nul et que $Im(f) \subset Ker(f)$. Justifier que f est nilpotent d'indice 2.

5. Un dernier exemple : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie sur E par $f(P) = P'$.

- Justifier que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice $n + 1$
- Préciser la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^n A^k$.
- Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

(d) Soit $\mathcal{D} = (X^n, f(X^n), \dots, f^k(X^n), \dots, f^n(X^n))$. Vérifier que $\mathcal{D}$ est une base de E .

Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{D}$.

Ecrire un programme Python demandant n à l'utilisateur, calculant et affichant B .

(e) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $g^2 = f$.

En remarquant que $g \circ f = f \circ g$, prouver que le plan $F = Vect(1, X)$ est stable par g .

Notons h la restriction de g à F . Comme F est stable par g , g est alors un endomorphisme de F . Justifier que h est nilpotent d'indice 2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 : un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction $T(f)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. (a) Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x .

(b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi \cdot x)$. Déterminer $T(f)$.

2. (a) Justifier que T est un endomorphisme de E .

(b) T est-il injectif ? surjectif ? Justifier.

3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E .

(a) Justifier que F est stable par T .

(b) On note U la restriction de l'application T à F . Cette application U est alors un endomorphisme de F .

Déterminer la matrice de U dans la base canonique $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$.

(c) U est-il un automorphisme de F ? U est-il diagonalisable ?

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit g_a l'application où $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \exp(ax)$.

(a) Question préliminaire

Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}$, où $h(0) = 1$ et $\forall u \in \mathbb{R}^*, h(u) = \frac{e^u - 1}{u}$.

- Vérifier que h est continue sur $\mathbb{R}$, préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Justifier que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que g_a est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $g(a)$. En déduire que tout réel strictement positif est une valeur propre de T .

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (g_0, \dots, g_n)$. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{B}$ est une famille libre.