DM n° 3 - pour le mardi 7 octobre 2025

Exercice 1 : un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
A toute fonction f de E, on associe la fonction $T(f)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)\ dt$$

1. (a) Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x.
   (b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi.x)$. Déterminer $T(f)$.
2. (a) Justifier que T est un endomorphisme de E.
   (b) T est-il injectif ? surjectif ? Justifier.
3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Justifier que F est stable par T.
   (b) On note U la restriction de l'application T à F. Cette application U est alors un endomorphisme de F.
   Déterminer la matrice de U dans la base canonique $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour tout $k \in [[0, 2]]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$.
   (c) U est-il un automorphisme de F ? U est-il diagonalisable ?
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit g_a l'application où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_a(x) = \exp(ax)$.
   (a) <u>Question préliminaire</u>
   Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}$, où $h(0) = 1$ et $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $h(u) = \dfrac{e^u - 1}{u}$.
      i. Vérifier que h est continue sur $\mathbb{R}$, préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
      ii. Justifier que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que g_a est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $g(a)$. En déduire que tout réel strictement positif est une valeur propre de T.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (g_0, \cdots, g_n)$. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Exercice 2 : un exercice sur la trace

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
   (a) Montrer que $Im(\text{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(Tr)$.
   (c) Etablir que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{tr}) \oplus Vect(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \text{tr}(M)I$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $f(I)$. En déduire une valeur propre de l'endomorphisme f.
   (c) Soit $B \in ker(\text{tr})$. Calculer $f(B)$. En déduire une autre valeur propre de f.
   (d) Montrer que f est diagonalisable.
   (e) f est-il un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Soit J une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
   Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \text{tr}(M)J$.

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) g est-il diagonalisable ?
   (d) Soit F un sous-espace vectoriel de $Ker(Tr)$. Prouver que F est stable par g.
   (e) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $J \in G$. Prouver que G est stable par g.
   (f) Justifier qu'il existe une matrice B de trace nulle, telle que $B \notin Vect(J)$.
   Soit $H = Vect(I, B)$. Justifier que H est un plan vectoriel ne contenant pas J, et que H n'est pas stable par g.