Corrigé du DM n° 2

Exercice : endomorphismes nilpotents en dimension finie

1. Soit f un endomorphisme nilpotent, et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0$.
   On raisonne par l'absurde. Supposons que f est bijectif. Alors par composition, $f^m = f \circ f \circ \cdots \circ f$ est bijectif. Absurde puisque $f^m = 0$!!
   Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est nilpotent, alors } f \text{ n'est pas bijectif}}$

2. (a) $A \neq 0$ et $A^2 = 0$, donc $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Par conséquent, f est nilpotent d'indice 2.

   (b) D'une part, $Im(f) = Vect((1,1))$. D'autre part, $(x,y) \in Ker(f)$ ssi $x - y = 0$ ssi $x = y$. Donc on a aussi
   $$Ker(f) = \{(x,x)/x \in \mathbb{R}\} = Vect((1,1))$$
   Ainsi $Ker(f) = Im(f)$ et cet espace a pour base $(u) = ((1,1))$ (libre car $u \neq 0$).

3. (a) Comme f est nilpotent, d'après le 1. f n'est pas bijectif. Donc sa matrice A n'est pas inversible, et d'après le cours sur les matrices 2×2 son déterminant est nul :
   $$det(A) = ad - bc = 0$$
   Ensuite,
   $$A^2 - (a+d)A = \cdots = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

   (b) Comme f est non nul, A est non nulle.
   Si $a + d \neq 0$ alors $A^2 = (a+d).A \neq 0$. Puis $A^3 = (a+d).A^2 = (a+d)^2.A \neq 0$, etc... Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0$, ce qui est absurde puisque l'on suppose A nilpotente.
   Donc $a + d = 0$ et $A^2 = 0$.
   $\boxed{\text{On en déduit bien que } m = 2}$

   (c) Comme $A^2 = 0$, on a $f^2 = 0$, et donc pour tout $y \in Im(f)$, $y = f(x)$, on a $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in Ker(f)$. Ainsi $Im(f) \subset Ker(f)$.
   De plus $Ker(f) \neq \mathbb{R}^2$ puisque $f \neq 0$, et donc $\dim(Ker(f)) \leq 1$. On a donc
   $$\dim(Im(f)) \leq \dim(Ker(f)) \leq 1$$
   et par le théorème du rang $\dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = 2$. Seule possibilité : $\dim(Im(f)) = \dim(Ker(f)) = 1$.
   Donc $\boxed{f \text{ est de rang } 1}$
   Comme $Im(f) \subset Ker(f)$ et ces deux ev sont de même dimension, $\boxed{Im(f) = Ker(f)}$

   (d) Comme $\dim(Ker(f)) = 1$, $Ker(f) \neq E$. Soit $v \in E \setminus Ker(f)$. Notons $u = f(v)$, alors $u \neq 0$ et $u \in Im(f) = Ker(f)$. Donc $f(u) = 0$.
   Montrons que la famille (u,v) est libre.
   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha.u + \beta.v = 0$ (*).
   Alors en appliquant f, comme $u \neq 0$:
   $$\alpha.f(u) + \beta.f(v) = 0 \Leftrightarrow \beta.u = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$
   Puis avec (*), $\alpha.u = 0$, donc $\alpha = 0$. Donc la famille $\mathcal{C}' = (u,v)$ est libre. Etant de cardinal 2, c'est une base de $\mathcal{R}^2$.
   Comme $f(u) = 0$ et $f(v) = u$, on obtient bien $\boxed{A' = Mat_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4. Si $Im(f) \subset Ker(f)$, alors $f^2 = 0$. Comme $f \neq 0$, f est bien nilpotent d'indice 2.

5. Un dernier exemple : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie sur E par $f(P) = P'$.

   (a) On montre facilement que f est linéaire. Si $deg(P) \leq n$, alors $deg(P') \leq n - 1$, donc f va bien de E dans E : f est un endomorphisme de E.
   Par ailleurs, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $deg(P^{(n)}) \leq 0$: $P^{(n)}$ est un polynôme constant.
   Par conséquent, en dérivant encore une fois, $P^{(n+1)} = 0$.
   Il s'ensuit que $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. De plus si $P = X^n$ alors $f^{(n)}(P) = n! \neq 0$ donc $f^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E \text{ nilpotent d'indice } n+1}$

   (b) On obtient
   $$A = Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & k-1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
   Par conséquent,
   $$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -(k-1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   La matrice $I - A$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, donc cette matrice est inversible.

Puisque l'énoncé nous propose un inverse, faisons le calcul !

$$(I-A).\sum_{k=0}^{n}A^k=\sum_{k=0}^{n}A^k-\sum_{k=0}^{n}A^{k+1}=I-A^{n+1}$$

par télescopage. Comme $f^{n+1}=0$, en passant aux matrices $A^{n+1}=0$. Ainsi $(I-A).\sum_{k=0}^{n}A^k=I$ donc on a bien $\boxed{(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}A^k}$

(c) Soit $P\in E$.

$$P\in Ker(f)\Leftrightarrow P'=0\Leftrightarrow P \text{ est constant}$$

Donc $Ker(f)=\mathbb{R}_0[X]$.
Par ailleurs,

$$Im(f)=Vect(f(1),f(X),\cdots,f(X^n))=Vect(1,2X,3X^2,\cdots,nX^{n-1})$$

$$Im(f)=Vect(1,X,X^2,\cdots,X^{n-1})=\mathbb{R}_{n-1}[X]$$

(d) Pour tout $k\in[[0,n]]$, $deg(f^{(k)}(X^n))=n-k$. La famille $\mathcal{D}$ est donc formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc $\mathcal{D}$ est libre. De plus $Card(\mathcal{D})=n+1=\dim E$, donc $\mathcal{D}$ est une base de E.
Pour tout $k\in[[0,n-1]]$, $f(f^{(k)}(X^n))=f^{(k+1)}(X^n)$ et $f(f^{(n)}(X^n)=0$ donc

$$B=Mat_{\mathcal{D}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0&\dots&0\\1&0&0&&\vdots&&\vdots\\0&1&0&\ddots&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

<u>Programme Python</u>

```
import numpy as np
B=np.zeros([n,n])
for k in range(1,n) :   #attention cette boucle s'arrête lorsque k=n-1
      B[k,k-1]=1 #attention au décalage des indices de matrices en Python
print(B)
```

(e) On suppose qu'il existe $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que $g^2=f$.
On a alors

$$g\circ f=g\circ g^2=g^3=g^2\circ g=f\circ g$$

Soit $P\in F=Vect(1,X)$. Alors

$$f^2\circ g(P)=g\circ f^2(P)=g(P'')=g(0)=0$$

en utilisant la linéarité de g. Autrement dit, $(g(P))''=0$: $g(P)$ est un polynôme dont la dérivée seconde s'annule, donc $g(P)\in Vect(1,X)$. Par conséquent le plan F est stable par g.
On note h l'endomorphisme de F induit par g. h est alors nilpotent puisque pour tout $P\in F$, $h^4(P)=g^4(P)=f^2(P)=P''=0$. D'après le 2., tout

endomorphisme nilpotent non nul d'un e.v. de dimension 2 a pour indice 2.
Donc $\boxed{h \text{ est nilpotent d'indice } 2}$. Par conséquent $h^2=0$ donc pour tout $P\in F$, $f(P)=g^2(P)=h^2(P)=0$ ce qui est faux puisque par exemple $f(X)=1$.
Ainsi ce raisonnement est <u>absurde</u> et
$\boxed{\text{il n'existe pas d'application } g\in\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) \text{ telle que } g^2=f}$