ECG2 - Lycée Saint Just — Programme de colle - **Semaine 5**
Mathématiques Approfondies 2025/26 — du 13 au 17 octobre 2025

`Informatique : programmation en langage Python`

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.
Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`. Tracé d'une courbe en Python, calcul des termes d'une suite.

(*) : **preuve exigible**

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (suite et fin)

I. Valeurs propres et vecteurs propres

II. Diagonalisation

1. Cas des endomorphismes

- f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
- f est diagonalisable si et seulement si

$$E = \oplus_{\lambda \in Spec(f)} Ker(f - \lambda.Id)$$

- f est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(f)} \dim(Ker(f - \lambda Id_E) = \dim(E)$$

- **Condition suffisante de diagonalisabilité**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$. **Si** f admet n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable et tout sous-espace propre de f est de dimension 1.

2. Cas des matrices

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(K)$, i.e. s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.

- A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}' = (U_1, \cdots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (respectivement associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n). Dans ce cas, la matrice $P = (U_1|U_2\ |\cdots|U_n)$ (obtenue en concaténant les colonnes U_1, ..., U_n) diagonalise A :

$$P^{-1}.A.P = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\oplus_{\lambda \in Spec(A)} Ker(A - \lambda.I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda.I)) = n$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Spec(A) \neq \emptyset$. Alors :

$$Card(Spec(A)) \leq \sum_{\lambda \in Spec(A)} \dim(Ker(A - \lambda I)) \leq n$$

- **condition suffisante de diagonalisabilité**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Si** A admet n valeurs propres distinctes **alors** A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- **cas des matrices symétriques**
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- 1. Deux matrices semblables A et B ont le même spectre. (*)
  2. Les matrices A et ${}^tA$ ont le même spectre. (*)
- **Exercice à savoir refaire**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une unique valeur propre λ. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

3. Lien endomorphismes - matrices

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

1. $Spec(f) = Spec(A)$
2. u est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A
3. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.
4. Si $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont associés aux vecteurs propres $u_1, \cdots, u_n$.
5. P est un polynôme annulateur de $f \Leftrightarrow P$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice à savoir refaire rapidement :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de J, montrer que J est diagonalisable, déterminer des matrices inversible P et diagonale D telles que $J = P.D.P^{-1}$

Chapitre 4. Intégrales impropres (sauf fonction Gamma)

I. Nature et valeur d'une intégrale impropre

- Définition. Intégrale impropre à gauche, à droite. Lien avec l'aire sous la courbe dans le cas des fonctions positives.
- Intégrale doublement impropre : on coupe l'intégrale en deux.
- Intégrale multiplement impropre : on coupe en autant de morceaux que nécessaire.
- Intégrale faussement impropre : attention **uniquement** pour des intégrales impropres **en un réel** b
- Intégrale grossièrement divergente en $+\infty$ (ou en $-\infty$) :
  si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, ou bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$ alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est (grossièrement) divergente.
  Attention si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on ne peut rien en déduire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.
  Si f n'a pas de limite en $+\infty$ on ne peut rien en déduire non plus.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux.
- Reste d'une intégrale impropre convergente.

II. Intégrales usuelles

- Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ (*).
  Dans le cas où $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$ (*)
- Intégrales de Riemann "simples" :
  L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  Valeurs des intégrales HP : à savoir recalculer si nécessaire
- Intégrales de Riemann "simples" (variante)
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et c un réel strictement positif.
  L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{c} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- Intégrale de Riemann impropre en un réel : cas général.
  Soit a et b deux réels, $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- Intégrale de Gauss :
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}\, dt}$ existe et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\,\pi}$
  ADMIS. Valeur à connaître par coeur.

Exercice à savoir refaire :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et la calculer.

HP mais sert souvent !! Connaître la primitive de la fonction ln

III. Propriétés et méthodes de calcul

- Linéarité (si intégrales convergentes !).
- Relation de Chasles (si intégrales convergentes !)
- Positivité, croissance, stricte positivité (idem, **avec bornes dans le bon sens**). Fonction continue positive d'intégrale nulle.

IV. Techniques de calcul

Que <u>deux</u> techniques classiques : être réactif lors des exercices !!

- Intégration par parties : sur bornes propres uniquement. Commencer par fixer des bornes.
- Changement de variables. On peut faire le changement sur bornes impropres. Méthode "en six points".
  Ne pas oublier φ $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Conclusion : les deux intégrales sont de même nature. En cas de convergence elles sont égales.
- Fonctions paires et impaires.

V. Critères de convergence pour les fonctions positives

Critères de majoration, d'équivalence, de négligeabilité pour les fonctions positives (fonctions négatives marche aussi).

VI. Convergence absolue

.

(*) : **preuve exigible**