DM n° 4 - pour le mardi 14 octobre 2025

Devoir en auto-correction. Le corrigé sera posté le mardi 14/10.
Révisez en détail votre cours sur la réduction; reprenez les exercices vus en TD. Ensuite, cherchez l'**ex. 1 en 2h maximum**

Exercice 1 : spectre de AB et spectre de BA

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB et BA.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA.

Soit maintenant A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que $BX \neq 0$.
   (b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA.
3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Supposons que B est inversible.
   Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
   (b) Supposons que B n'est pas inversible. Montrer que $\operatorname{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres?

Partie 2

On considère A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n-uplet de réels non tous nuls ($\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$) tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
   (a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A, aboutir à une contradiction.
   (c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$?
7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X.
   (b) Exprimer de deux manières différentes BAX.
   (c) En déduire que $BX \in \operatorname{Vect}(X)$.
8. Déduire que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.
9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], AX_i = \lambda_i X_i$$
   (b) Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$. Montrer que $\operatorname{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.
10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
   (a) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], BX_i = P(\lambda_i) X_i$$
   (c) Montrer que $B = P(A)$.
11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.
   (c) À l'aide de la question 6 , déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 2 : rédigez l'exercice 10 du TD "Intégrales Impropres"