

Exercice 1 : un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

1. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ existe bien. Ainsi $T(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x)$$

Comme F est primitive d'une fonction continue, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On en déduit que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T(f))'(x) = f(x+1) - f(x)$$

- (b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi.x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_x^{x+1} \sin(2\pi.t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi.t)\right]_x^{x+1} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot (\cos(2\pi.x + 2\pi) - \cos(2\pi.x)) \\ &= 0 \text{ par périodicité du sinus} \end{aligned}$$

Ainsi $T(f)$ est l'application nulle : $T(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. (a) Soit $(f, g) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha.f + g \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\alpha.f + g)(x) &= \int_x^{x+1} \alpha.f(t) + g(t)dt \\ &= \alpha \cdot \int_x^{x+1} f(t)dt + \int_x^{x+1} g(t)dt \\ &= \alpha.T(f)(x) + T(g)(x) \end{aligned}$$

et on en déduit que $T(\alpha.f + g) = \alpha.T(f) + T(g)$ donc T est linéaire.

D'après ce qui précède, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $T(f)$ est continue et $T(f) \in E$.

Bilan : T est un endomorphisme de E

- (b) En considérant la fonction du 2., $x \mapsto f(x) = \sin(2\pi.x)$, nous avons vu que $T(f) = 0$. Ainsi $f \in \ker(T)$ mais $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$: T n'est pas injective. Par ailleurs, pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc des fonctions $g \in E$ n'ayant pas d'antécédent sur $\mathbb{R}$: il suffit de prendre une fonction qui est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par exemple la valeur absolue.

3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E .

- (a) Soit $P \in F$: il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = at^2 + bt + c$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(P)(x) &= \int_x^{x+1} at^2 + bt + c dt \\ &= \left[\frac{1}{3}a.t^3 + \frac{1}{2}b.t^2 + ct\right]_x^{x+1} \\ &= \frac{1}{3}a.(x+1)^3 + \frac{1}{2}b.(x+1)^2 + c.(x+1) - \frac{1}{3}a.x^3 - \frac{1}{2}b.x^2 - cx \\ &= \frac{1}{3}a.(3x^2 + 3x + 1) + \frac{1}{2}b.(2x + 1) + c \end{aligned}$$

et la fonction obtenue est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Ainsi $T(P) \in F$.

Bilan : F est stable par T

- (b) Comme F est stable par T , on peut considérer U l'endomorphisme induit par T sur F .

En reprenant les calculs précédents, on obtient que :

$$U(f_0) = T(f_0) = f_0, \quad U(f_1) = T(f_1) = f_1 + \frac{1}{2}f_0, \quad U(f_2) = T(f_2) = f_2 + f_1 + \frac{1}{3}f_0$$

Ainsi

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Cette matrice A est triangulaire inférieure sans 0 sur la diagonale. Elle est donc inversible et U est bijectif. Ainsi U est un automorphisme de F .

De plus, cette matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(U) = \{1\}$.

Supposons A diagonalisable. Alors il existerait une matrice inversible P telle que

$$A = P \cdot \text{Diag}(1, 1, 1) \cdot P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = I$$

Absurde car $A \neq I$!!

Donc A n'est pas diagonalisable.

Bilan : U est un automorphisme de F , mais U n'est pas diagonalisable

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit g_a l'application où $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \exp(ax)$.

- (a) Question Préliminaire

- i. h est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient. Par équivalence classique $e^u - 1 \sim_{u \rightarrow 0} u$, donc $\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = 1 = h(0)$, donc h est aussi continue en 0. Donc h est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient sans problème : $\lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = 0$, et par croissances comparées $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty$.

- ii. Par quotient de fonctions dérivables avec le dénominateur qui ne s'annule pas, h est dérivable sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}$$

donc $h'(x)$ est du signe de $e^x(x - 1) + 1$.

Notons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x \cdot (x - 1) + 1$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = e^x \cdot (x - 1) + e^x = x \cdot e^x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $\varphi'(x) \leq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) \geq 0$.

La fonction φ est donc décroissante sur $] - \infty, 0[$, croissante sur $]0; +\infty[$ et elle admet donc pour minimum $g(0) = 0$. Par conséquent, la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}$ (et même strictement positive sur $\mathbb{R}^*$). On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $] - \infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Etant continue en 0, on en déduit qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Finalement, h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) [=]0; +\infty[$.

- (b) Soit $a \in \mathbb{R}$.

- 1er cas : supposons $a \neq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(g_a)(x) = \left[\frac{1}{a} \cdot e^{at} \right]_x^{x+1} = \frac{1}{a} \cdot (e^{a(x+1)} - e^{ax}) = \frac{e^a - 1}{a} \cdot e^{ax} = \frac{e^a - 1}{a} \cdot g_a(x)$$

Ainsi $T(g_a) = \frac{e^a - 1}{a} \cdot g_a$. On en déduit que g_a est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $h(a) = \frac{e^a - 1}{a}$.

- 2ème cas : supposons $a = 0$.

Alors g_0 est la fonction constante égale à 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(g_0)(x) = \int_x^{x+1} 1 \, dt = 1 = g_0(x)$$

Donc $T(g_0) = g_0$: g_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $1 = h(0)$.

Bilan : pour tout $a \in \mathbb{R}$, g_a est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $h(a)$

Comme la fonction h est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; \infty[$, pour tout réel strictement positif λ , il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = h(a)$ donc λ est une valeur propre associée au vecteur propre g_a .

Par conséquent, tout réel strictement positif est une valeur propre de T

Remarquons que T est un endomorphisme d'un e.v. de dimension infinie, il est donc possible que T ait une infinité de valeurs propres.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (g_0, \dots, g_n)$. Comme l'application h est injective, $g_0, \dots, g_n$ sont des vecteurs propres de T associés à des valeurs propres $h(0), h(1), \dots, h(n)$ deux à deux distinctes. D'après le cours, la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Exercice 2 : un exercice sur la trace

1. (a) D'après le cours, l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi $\text{Im}(tr) \subset \mathbb{R}$ et $\text{Im}(tr)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\dim(\text{Im}(tr)) \leq \underbrace{\dim(\mathbb{R})}_{=1}$. Donc : $\dim(\text{Im}(tr)) \in \{0, 1\}$.

$tr(I_n) = n \neq 0$. Ainsi $\text{Im}(tr) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Ainsi, $\dim(\text{Im}(tr)) \geq 1$.

Bilan : $\dim(\text{Im}(tr)) = 1$

$\text{Im}(tr) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\text{Im}(tr)) = \dim(\mathbb{R})$ donc : $\text{Im}(tr) = \mathbb{R}$

- (b) D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(tr)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(tr)) = n^2 - 1$$

- (c) Tout d'abord,

$$\dim(\ker(tr)) + \dim(\text{Vect}(I)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \quad (i)$$

Montrons que $\ker(tr) \cap \text{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ en procédant par double inclusion.

- $\ker(tr)$ et $\text{Vect}(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\} \subset \ker(tr) \cap \text{Vect}(I)$

- Soit $M \in \ker(tr) \cap \text{Vect}(I)$. Montrons que $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$M \in \text{Vect}(I)$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I$.

$M \in \ker(tr)$ donc $tr(M) = 0$. Ainsi $tr(\alpha I) = 0$ donc $\alpha n = 0$.

$n \neq 0$ donc $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$ donc $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\ker(tr) \cap \text{Vect}(I) \subset \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$

- Par double inclusion : $\ker(tr) \cap \text{Vect}(I) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$

Bilan : d'après (i) et (ii), on a bien $\ker(tr) \oplus \text{Vect}(I) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \text{tr}(M)I$

- (a) (i) Montrons que f est linéaire. Soient $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(M_1 + \alpha M_2) &= (M_1 + \alpha M_2) + tr(M_1 + \alpha M_2)I \\ &= M_1 + \alpha M_2 + (tr(M_1) + \alpha tr(M_2))I \text{ par linéarité de la trace} \\ &= M_1 + tr(M_1)I + \alpha(M_2 + tr(M_2)I) \\ &= f(M_1) + \alpha f(M_2) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

- (ii) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ donc, $M + \text{Tr}(M)I$ est une combinaison linéaire des matrices I et M . Ainsi $M + \text{Tr}(M)I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Grâce à (i) et (ii), f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- (b) $f(I) = I + tr(I)I = (n + 1)I$.

Par ailleurs, $n + 1 \in \mathbb{R}$ et $I \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

donc $n + 1$ est une valeur propre de f .

De plus, I est un vecteur propre pour f associé à la valeur propre $n + 1$.

(c) Soit $B \in \ker(\text{tr})$.

$$f(B) = B + \text{tr}(B)I = B \text{ car } \text{tr}(B) = 0_{\mathbb{R}}.$$

On a montré que $\dim(\ker(\text{tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1$.

$n \geq 2$ donc $n^2 \geq 4$ donc $\dim(\ker(\text{tr})) \geq 3 > 0$.

Ainsi, il existe une matrice $B_0 \in \ker(\text{tr})$ non nulle.

ainsi $B_0 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $f(B_0) = B_0$.

Donc : $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } f}$.

(d) On a montré que 1 et $n+1$ sont **des** valeurs propres de f . Par ailleurs, $n+1 \neq 1$.

$$1 \in \text{Sp}(f) \text{ donc } \boxed{\dim(E_{n+1}(f)) \geq 1}$$

On a montré que $\forall B \in \ker(\text{tr}), B \in E_1(f)$. Ainsi $\ker(\text{tr}) \subset E_1(f)$.

$$\text{Donc } \dim(\ker(\text{tr})) \leq \dim(E_1(f)). \text{ Ainsi } \boxed{\dim(E_1(f)) \geq n^2 - 1}.$$

Par somme : $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \geq n^2$.

Donc $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \geq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

On a donc fait le plein de valeurs propres.

Par ailleurs, grâce à l'inégalité sur les dimensions des sous-espaces propres :

$$n^2 \leq \dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f)) \leq \underbrace{\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}_{=n^2}$$

donc : $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Bilan :

L'endomorphisme f est diagonalisable,
 $\text{Sp}(f) = \{1, n+1\}$, $\dim(E_{n+1}(f)) = 1$ et
 $\dim(E_1(f)) = n^2 - 1$

(e) Comme $0 \notin \text{Sp}(f)$, f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \text{tr}(M)J$.

On admet que g est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) $P(g) = gog - 2g + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrons que $gog - 2g + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (gog - 2g + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M) &= g(g(M)) - 2g(M) + M \\ &= g\left(M + \underbrace{\text{tr}(M)J}_{\in \mathbb{R}}\right) - 2(M + \text{tr}(M)J) + M \\ &= g(M) + \text{tr}(M)g(J) - M - 2\text{tr}(M)J \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= M + \text{tr}(M)J + \text{tr}(M)\left(J + \underbrace{\text{tr}(J)J}_{=0}\right) - M - 2\text{tr}(M)J \\ &= 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Bilan :

$\boxed{\text{le polynôme } X^2 - 2X + 1 \text{ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme } g}$.

(b) $P = X^2 - 2X + 1$ a pour unique racine 1. Comme $\text{Sp}(g) \subset \{\text{racines de } P\}$,
 $\text{Sp}(g) \subset \{1\}$

Par ailleurs, $g(J) = J$ et J n'est pas la matrice nulle donc 1 est une valeur propre de g . donc $\{1\} \subset \text{Sp}(g)$

Par double inclusion : $\text{Sp}(g) = \{1\}$

Bilan : $\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g}$.

(c) Montrons par l'absurde que g n'est pas diagonalisable.

On suppose que g est diagonalisable.

g est supposée diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la matrice $H \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ est diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres de g c'est à dire 1.

ainsi $H = I_{n^2}$. Ainsi $g = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Or on sait que $g(I) = I + nJ$, mais $nJ \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $g(I) \neq I$ Ainsi $g \neq Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ce qui est absurde.

Bilan : $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

(d) Soit F un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(Tr)$. Soit $M \in F$. Alors

$$g(M) = M + \text{tr}(M).J = M \in F$$

donc F est stable par g .

(e) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $J \in G$. Soit $M \in G$. Alors

$$g(M) = M + \text{tr}(M).J \in G$$

car $M \in G$, $J \in G$ et G est stable par combinaison linéaire (c'est un sev).

(f) Comme $\text{tr}(J) = 0$, on a $\text{Vect}(J) \subset \ker(\text{tr})$. Comme $\dim(\ker(\text{tr})) = n^2 - 1 > 1$ (car $n \geq 2$), il existe bien une matrice B de trace nulle telle que $B \notin \text{Vect}(J)$. Soit $H = \text{Vect}(I, B)$. Montrons tout d'abord que la famille (I, B) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha.I + \beta.B = 0$. Alors, par linéarité de la trace,

$$\text{tr}(\alpha.I + \beta.B) = 0 \Leftrightarrow \alpha.\text{tr}(I) + \beta.\text{tr}(B) = 0 \Leftrightarrow \alpha.n = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

d'où $\beta.B = 0$. Comme $B \neq 0$, $\beta = 0$.

Ainsi la famille (I, B) est libre, il s'agit donc d'une base de H et H est bien un plan vectoriel.

On raisonne par l'absurde pour montrer que $J \notin H$.

Supposons que $J \in H$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $J = \alpha.I + \beta.B$. D'où $\text{tr}(J) = \alpha.n$. Comme J est de trace nulle, $\alpha = 0$. D'où $\beta.B = J$. Mais comme $B \notin \text{Vect}(J)$, on a forcément $\beta = 0$. Absurde car J n'est pas nulle.

Ainsi $J \notin H$.

On raisonne par l'absurde pour montrer que H n'est pas stable par g .

Supposons que H est stable par g . Comme $I \in H$, on a $g(I) \in H$. Or

$$g(I) = I + n.J \Leftrightarrow J = \frac{1}{n}.g(I) - \frac{1}{n}.I \in H$$

ce qui est absurde car $J \notin H$.

Ainsi H n'est pas stable par g .

Bilan : $\boxed{H \text{ est un plan vectoriel ne contenant pas } A, \text{ et } H \text{ n'est pas stable par } g}$