

Exercice 1

Partie I

1.

$$(a) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Ces deux matrices étant triangulaires supérieures,

$$\sigma_f(AB) = \sigma_f(BA) = \{-1, 2\}$$

• Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$X \in \text{Ker}(AB+I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y=0$$

$$\text{Ker}(AB+I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$X \in \text{Ker}(AB-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=0$$

$$\text{Ker}(AB-2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X \in \text{Ker}(BA+I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=0$$

$$\text{Ker}(BA+I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X \in \text{Ker}(BA-2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x+y=0 \quad (1)$$

$$\text{Ker}(BA-2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{non nulle}$$

2. Soit λ une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé : $ABX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

(a) Supposons que $BX = 0$. Alors $ABX = 0$ donc $\lambda X = 0$ d'où $\lambda = 0$ puisque $X \neq 0$: absurde car on suppose λ non nulle. Donc $BX \neq 0$.

(b)

$$\bullet \quad BA \cdot BX = B \cdot ABX = B \cdot \lambda X = \lambda BX.$$

• De plus $BX \neq 0$ d'après le (a).

Donc BX est un vecteur propre de BA et λ est une valeur propre de BA .

3. On suppose que 0 est une valeur propre de AB et que X est un vecteur propre associé : $ABX = 0$ et $X \neq 0$.

(a) Supposons B inversible.

Si $BX = 0$ alors $B^{-1}BX = 0$ donc $X = 0$: absurde.

Donc $BX \neq 0$. Comme $BA \cdot BX = B \cdot 0 = 0$, on a bien $0 \in \sigma_f(BA)$.

(b) Supposons B non inversible.

Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ les endomorphismes
uniquement associés à A et à B .

$$\text{Alors } \operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg}(g \circ f) \\ = \dim \operatorname{Im}(g \circ f).$$

Comme $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$, alors

$$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Im}(g)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(BA) \leq \operatorname{rg}(B).$$

Comme B n'est pas inversible, $\operatorname{rg}(B) < n$.

$$\text{D'où } \underline{\operatorname{rg}(BA) < n}.$$

Ainsi BA n'est pas inversible donc $0 \in \mathcal{S}(BA)$.

4. Soit $\lambda \in \mathcal{S}_p(AB)$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in \mathcal{S}_p(BA)$ d'après 2.

Si $\lambda = 0$ alors $\lambda \in \mathcal{S}_p(BA)$ d'après 3.

$$\text{D'où } \mathcal{S}_p(AB) \subset \mathcal{S}_p(BA).$$

Par un argument symétrique, $\mathcal{S}_p(BA) \subset \mathcal{S}_p(AB)$.

$$\text{D'où } \boxed{\mathcal{S}_p(BA) = \mathcal{S}_p(AB)}$$

5. L'anneau du 1. matrice qu'en général AB et BA
n'ont pas les mêmes sous-espaces propres.

Partie 2 : $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\underline{AB = BA}$.

6. On suppose qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$
tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.

(a) Notons $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Les ses coefficients ne sont pas tous nuls

Alors $Q(A) = 0$ et $Q \neq 0 \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg(Q) \leq n-1$.

A admet un polynôme annulateur de degré $\leq n-1$.

(b) On sait que $\mathcal{S}_p(A) \subset \{\text{racines de } Q\}$.

Or $\mathcal{S}_p(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ alors que Q admet au plus $n-1$ racines. Ceci est absurde!

(c) On en déduit que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est
libre. En effet, soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$$

$(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ est absurde d'après le 6. (a) (b).

Donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ et la famille est bien liée.

7. Soit $\lambda \in \mathcal{S}_f(A)$ et X un vecteur propre associé :

$$AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0.$$

(a) Comme $A \in \text{db}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes, tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Ainsi d'un $\text{Ker}(A - \lambda I) = \mathbb{R}X$. Comme $X \neq 0$ et $X \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, on a bien $\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Vect}(X)$.

(b) D'une part, $BAX = B \cdot \lambda X = \lambda BX$

D'autre part, $BAX = ABX$

(c) Comme $ABX = \lambda BX$, on a $BX \in \text{Ker}(A - \lambda I)$

donc $BX \in \text{Vect}(X)$.

Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R} / BX = \alpha X$.

8. On en déduit bien que tout vecteur propre de A
est aussi un vecteur propre de B (mais pas associé à la même valeur propre en général!)

Remarque: cercue classique de "diagonalisation simultanée".

9. (a) Comme $A \in \text{db}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ formée de vecteurs propres de A :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, AX_i = \lambda_i X_i \text{ avec } X_i \neq 0.$$

D'après le 8., les vecteurs X_i sont aussi des vecteurs propres de B .

(b) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $BX_i = \mu_i X_i$

Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$ABX_i = A \cdot \mu_i X_i = \mu_i AX_i = \lambda_i \mu_i X_i \text{ avec } X_i \neq 0.$$

D'où $\{\lambda_i \mu_i / i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{S}_f(AB)$

Comme $\text{Card}(\mathcal{S}_f(AB)) \leq n$, on a bien

$$\boxed{\mathcal{S}_f(AB) = \{\lambda_i \mu_i / i \in \{1, \dots, n\}\}}$$

10.

(a) Soit $f: P \mapsto (P(d_1), \dots, P(d_n))$.
 $\mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$

* On montre facilement que f est linéaire (à faire!)

* Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, P(d_i) = 0.$$

Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul donc

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

D'où $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$: f est injective.

De plus $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$ donc f est bijective.

Bilan: f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$P \text{ vérifie : } \forall i \in \{1, \dots, n\}, B X_i = P(d_i) X_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, P(d_i) X_i = \mu_i X_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, P(d_i) = \mu_i \quad (\text{car } X_i \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$$

Comme f est bijective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe

un unique polynôme P tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, B X_i = P(d_i) X_i$$

(c) Notons encore $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes canoniquement associés à A et à B .

Notons $(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ correspondant à $(X_1, \dots, X_n)$.

$$\text{Notons aussi } P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k.$$

$$\text{On a } \forall i \in \{1, \dots, n\}, g(x_i) = P(d_i) x_i; \quad f(x_i) = d_i x_i$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad P(f)(x_i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot d_i^k \cdot x_i \quad (\text{clastique}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k d_i^k \right) \cdot x_i = P(d_i) x_i. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall i \in \{1, \dots, n\}, P(f)(x_i) = g(x_i).$$

Les applications g et $l(f)$ coïncident sur la base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, elles sont donc égales:

$$g = l(f).$$

D'ici matriciellement, $\boxed{B = P(A)}$

11. (a) $\mathcal{G}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) / AB = BA\}$ est un ser de $M_n(\mathbb{R})$.

classique!

Il s'agit du commutant de A .

(b)

$$\star \text{ Soit } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } A \cdot P(A) &= A \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A^{k+1} \\ &= P(A) \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \subset \mathcal{G}(A).$$

$\star$ D'après le 10., si B commute avec A alors

$$\begin{aligned} \text{il existe } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } B &= P(A). \\ \text{Donc } \mathcal{G}(A) &\subset \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \end{aligned}$$

Bilan: $\boxed{\mathcal{G}(A) = \{P(A) / P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}}$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \mathcal{G}(A) &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k / (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \text{Vect}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1}). \end{aligned}$$

D'après 6., la famille $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

$$\text{D'ici enfin } \boxed{\dim \mathcal{G}(A) = n}$$

Exercice 2

1. $0 \notin \ker(f)$ donc f est bijective:

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

h est symétrique si $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle h(x), y \rangle = \langle x, h(y) \rangle$

(b) ${}^t A = A$ car f est symétrique. En effet:

$$\begin{aligned} ({}^t A)_{i,j} &= A_{j,i} = \langle f(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, f(e_i) \rangle \\ &= \langle f(e_i), e_j \rangle = A_{i,j} \quad \begin{array}{l} \text{(on dit souvent} \\ \text{"d'après le cours")} \end{array} \end{aligned}$$

(c) Comme A est symétrique: A est orthodagonalisable:
il existe une matrice P orthogonale telle que
 ${}^t P A P = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, notons $X = \text{Mat}_\mathbb{R}(x)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\langle f(x), x \rangle &= {}^t(AX).X \\ &= {}^tX \cdot {}^tA \cdot X \\ &= {}^tX \cdot AX \\ &= {}^tX \cdot P \cdot D \cdot {}^tPX \\ &= {}^tY \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot Y\end{aligned}$$

où $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

D'où

$$\lambda_1(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \|Y\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|Y\|^2$$

$$\text{Or } \|Y\|^2 = {}^tY \cdot Y = {}^t({}^tPX) \cdot {}^tPX = {}^tX \cdot P \cdot {}^tPX = {}^tXX = \|X\|^2$$

D'où :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

Autre méthode : travailler dans une BON de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f .

(e) Si $x=0$ alors $\langle f(x), x \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$

Si $\langle f(x), x \rangle = 0$ alors $0 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \leq 0$

$$\text{d'où } \lambda_1 \|x\|^2 = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \text{ car } \lambda_1 \neq 0 \\ \Rightarrow x = 0$$

Ainsi $\langle f(x), x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

(a)

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

$$= \frac{1}{2} {}^t(AX).X - {}^tU.X$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{{}^tX \cdot {}^tAX}_{= {}^tXAX} - \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

en reconnaissant la forme quadratique associée à A .

Soit aussi

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^m u_i x_i$$

(b) la fonction g est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \partial_x g(x) &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n - u_1 \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j - u_1 \end{aligned}$$

(c) Par raison de symétrie, on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\partial_i g(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - u_i$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g(x) \\ \vdots \\ \partial_n g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$= AX - U$, soit en ligne:

$$\nabla g(x) = f(x) - u$$

(7)

4. x est point critique de g

$$\Leftrightarrow \nabla g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$$

Bilan: g admet un unique point critique m sur $\mathbb{R}^n$ et $m = f^{-1}(u)$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle &= \frac{1}{2} (\langle f(x), x \rangle - \langle f(x), m \rangle - \langle f(m), x \rangle + \langle f(m), m \rangle) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{2} \langle f(x), m \rangle - \frac{1}{2} \langle u, x \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, f(m) \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle - \frac{1}{2} \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle \text{ car } f \text{ symétrique}$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle \text{ car } f(m) = u \text{ et d'autre part, } \langle u, m \rangle = \langle f(m), m \rangle$$

$$\begin{aligned} g(x) - g(m) &= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle - \frac{1}{2} \langle u, m \rangle + \langle u, m \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle + \frac{1}{2} \langle u, m \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle$$

6. D'après le 9. (d), $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle \geq 0$$

d'où $g(x) \geq g(m)$.

Bilan: g admet un minimum global en m

Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2L}]$, $m_0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, m_{p+1} = m_p - \alpha \nabla g(m_p)$$

7. Soit $(a, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

(a)

$$\begin{aligned} \langle f(a+h), a+h \rangle &= \langle f(a) + f(h), a+h \rangle \\ &= \langle f(a), a \rangle + \langle f(a), h \rangle + \langle f(h), a \rangle + \langle f(h), h \rangle \\ &= \langle f(a), a \rangle + 2 \langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle \\ &\quad \text{par symétrie de } f \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} g(a+h) &= \frac{1}{2} \langle f(a+h), a+h \rangle - \langle u, a+h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle f(a), a \rangle + \langle f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle - \langle u, a \rangle \\ &\quad - \langle u, h \rangle \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} g(a+h) &= g(a) + \langle f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle - \langle u, h \rangle \\ &= g(a) + \langle f(a) - u, h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle \\ &= g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle. \end{aligned}$$

Remarque: le début de cette expression correspond au DL d'ordre 1 de g .

8. (a) En prenant $a = m_p$ et $h = -\alpha \nabla g(m_p)$:

$$\begin{aligned} g(m_{p+1}) &= g(m_p) + \langle \nabla g(m_p), -\alpha \nabla g(m_p) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle f(-\alpha \nabla g(m_p)), -\alpha \nabla g(m_p) \rangle \\ &= g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle \end{aligned}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x \rangle \leq L_n \|x\|^2$

D'où $\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle \leq L_n \|\nabla g(m_p)\|^2$

et

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} L_n \|\nabla g(m_p)\|^2$$

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} L_n \right) \|\nabla g(m_p)\|^2$$

3. (a) Comme $0 < \alpha \leq \frac{1}{2n}$,

on a $\alpha 2n \leq 1$ d'où $\frac{\alpha 2n}{2} \leq \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{\alpha 2n}{2} \geq 0$.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$.

La suite $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus la fonction g admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$
attant en m , donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $g(m_p) \geq g(m)$.

Bilan: la suite $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante
et minorée donc converge.

On admet que $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$.

(b) D'après le 5. et le 1. (d), $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$g(m_p) - g(m) = \frac{1}{2} < f(m_p - m, m_p - m) \\ \geq \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot \|m_p - m\|^2$$

d'où

$$\|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\alpha_1} (g(m_p) - g(m))$$

(c) Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(m_p) = g(m)$, on en déduit

que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|m_p - m\| = 0$: la suite de points $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$

tend vers m .

10. $n=2$, $u=(2,1)$

$$f: (x, y) \mapsto (2x+y, x+2y) \\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(a) On remarque facilement que f est linéaire.
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est symétrique,}$$

donc f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

(b) la suite de points m_p lorsque $\alpha = \alpha_1$ ne semble pas converger, donc $\alpha_1 = 0,67$ ne vérifie pas la condition $0 < \alpha_1 \leq \frac{1}{2n}$.

(c) On conjecture que $m = (1, 0)$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \mathcal{S}_p(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ non inversible

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

D'où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3} \text{ donc } \lambda_0 \leq \frac{1}{3} \text{ mais } \lambda_1 > \frac{1}{3}$$

condition non valable.

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } m = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$m = (1, 0)$: il s'agit bien de la valeur conjecturée.

Problème

(10)

Partie 1

import numpy as np

1. def F(x):

return np.exp(x) / (1 + np.exp(x))

2. F est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec le dénominateur qui ne s'annule pas, donc $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \cdot 2 \cdot e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}}$$

3.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0

$$f(0) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \rightarrow 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

4. $\star$ f est définie sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{\frac{1}{e^x}}{(1+\frac{1}{e^x})^2}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x) \text{ donc } f \text{ est paire.}$$

 $\star F - \frac{1}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{e^x(1+e^{-x})} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}$$

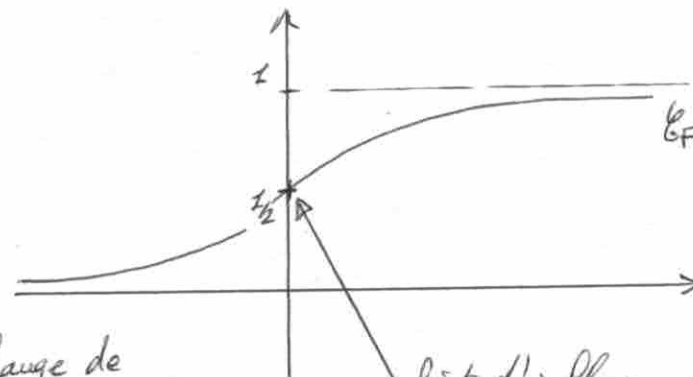
$$= \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2}$$

$$= - \left(\frac{e^x}{1+e^x} - \frac{1}{2} \right) = - \left(F(x) - \frac{1}{2} \right)$$

Donc la fonction $F - \frac{1}{2}$ est impaire.

5.



$F'' = f'$ change de

signe en 0

$\rightarrow$ point d'inflexion $(0, \frac{1}{2})$

point d'inflexion et
centre de symétrie.

6. la fonction F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Ainsi F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $I =]0, 1[$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in I =]0, 1[$.

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow y + y e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x (y-1) = -y \Leftrightarrow e^x = -\frac{y}{y-1} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

D'où $F^{-1}: x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$
 $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

Partie 2

7. $\forall n \geq 1, \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. (Riemann, $\alpha = 2 > 1$)

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est absolument convergente

donc convergente.

8.

* f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

* Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2, A < B$.

$$\int_A^B f(t) dt = [F(t)]_A^B = F(B) - F(A) \quad (\text{Théorème avec la primitive de } f)$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} F(x) - F(A) = F(x)$$

Bilan:

f est une densité de probabilité
 et F est la fonction de répartition associée

{ Ne pas oublier!

9. la fonction f est paire et positive, il en est donc de même pour $x \mapsto x^2 f(x)$.

$E(X^2)$ existe si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge (absolument) donc par paires si $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge.

$$x^4 f(x) dx = x^4 \cdot \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \sim x^4 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $x^2 f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ as $x \rightarrow +\infty$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$), par négligeabilité (fonctions positives), $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge aussi.

Bilan: $E(X^2)$ existe, donc X admet une espérance et une variance.

10: (a) Posons $u = -x$. → ($\mathbb{R}^+$, strictement décroissant)

L'application $x \mapsto -x$ est affine donc le changement de variables est autorisé. $du = -dx$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x f(x) dx &= \int_{+\infty}^0 -u f(-u) \cdot (-du) \\ &= - \int_0^{+\infty} u f(u) du \text{ par suite de } f \\ &= - \int_0^{+\infty} x f(x) dx \end{aligned}$$

(ces intégrales sont convergentes car $E(X)$ existe).

(b) D'ai

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = 0$$

11.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ (formule de Huygens)}$$

$$= E(X^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ par suite de } f$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

Soit $A > 0$ et $I_A = \int_0^A \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = f(x) \\ v(x) = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = F(x) - 1 = -\frac{1}{1+e^x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_A &= \left[-\frac{x^2}{1+e^x} \right]_0^A + 2 \int_0^A \frac{x}{1+e^x} dx \\ &= -\frac{A^2}{1+e^A} + 2 \int_0^A \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \end{aligned}$$

$\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ car $\frac{A^2}{1+e^A} \sim \frac{A^2}{e^A} \rightarrow 0$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ est bien convergente

car on montre par exemple que $\frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$.

D'ici

$$V(X) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $Y \in \mathcal{G}(n)$: Y a pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et pour espérance $E(Y) = \frac{1}{n}$.

D'ici $\int_0^{+\infty} n \cdot x e^{-nx} dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}$

13. Variante: IPP

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \cdot x e^{-nx} \\ &= -x \sum_{n=1}^N (-e^{-x})^n \\ &= +x \cdot e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (-e^{-x})^n = x e^{-x} \cdot \frac{1 - (-e^{-x})^N}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \cdot x e^{-nx} = \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} + (-1)^{N+1} \cdot x \frac{e^{-(N+1)x}}{1 + e^{-x}} \quad (14)$$

D'ici en intégrant, toutes les intégrales étant convergentes,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \\ &+ (-1)^N \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-(N+1)x}}{1 + e^{-x}} dx \end{aligned}$$

donc

$$V(X) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$V(X) = 4 \left(\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right)$$

Rq: classique, basé sur $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \dots$

Ik. (a) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + e^{-x} \geq 0$

d'ici $|R_N(x)| \leq x e^{-(N+1)x}$

$$\begin{aligned} (b) \quad \left| \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right| &\leq \int_0^{+\infty} |R_N(x)| dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} x e^{-(N+1)x} dx = \frac{1}{(N+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 0$, par encadrement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(x) dx = 0$$

15. En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans 13.:

$$\begin{aligned} V(X) &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \\ &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} = 4 \cdot \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

Bilan: $V(X) = \frac{\pi^2}{3}$

Partie 3

16. Comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, par coalition $X_1^2, \dots, X_n^2$ le sont aussi.

Comme ces variables ont la même espérance

$$E(X^2) = V(X) = \frac{\pi^2}{3} \text{ et admettent une variance,}$$

par la loi faible des grands nombres,

$$V_n = \frac{1}{n} (X_1^2 + \dots + X_n^2) \xrightarrow{P} E(X^2) = \frac{\pi^2}{3} \quad (15)$$

Rq: autre méthode IBT

17. Soit $T_n = \sqrt{3V_n}$.

Comme $V_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$V_n \xrightarrow{P} \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sqrt{3V_n} \xrightarrow{P} \sqrt{3 \cdot \frac{\pi^2}{3}} = \pi$$

Donc $T_n \xrightarrow{P} \pi$

18. Méthode d'inversion!

Soit $U \subset \mathcal{B}([0; 1[)$. Notons $V = F^{-1}(U)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_V(x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$$

$$= P(U \leq F(x)) \quad \text{car } F \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ et l'égative}$$

$$= F(x) \quad \text{car } F(x) \in [0; 1[.$$

V et X ont la même fonction de répartition donc suivent la même loi.

Bilan: $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X

19.

def realisation_X:

U = rd.random()

return np.log(U/(1-U))

(cf calcul de F^{-1})

20. def estimation_pi:

n = 100000

V = 0

for k = 1:n

V = V + (realisation_X) * z

V = (1/n) * V

return np.sqrt(3 * V)

21. (a) la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; 1[$.Comme $0,975 \in]0; 1[$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x) = 0,975$.Comme $\Phi(0) = \frac{1}{2} \leq \Phi(x) = 0,975$, par stricte croissance de Φ on a $x \geq 0$.Bilan: il existe un unique $z \geq 0$ tel que

$$\Phi(z) = 0,975.$$

On admet que $z \leq 2$ et que $\pi \leq 4$ (3) _{LOL}(b) On considère la variable centrée réduite associée à V_n .

$$V_n^* = \frac{V_n - E(V_n)}{\sqrt{V(V_n)}} = \frac{V_n - \frac{\pi^2}{3}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4\pi^2}{3\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} (V_n - \frac{\pi^2}{3})$$

$$\text{car } V(V_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n V(X_k^2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{16\pi^4}{45}$$

Comme $X_1^2, \dots, X_n^2$ suit de même loi et indépendantes, d'après le Théorème central limite,

$$V_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{P}(0, 1)$$

Ainsi

$$P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} |V_n - \frac{\pi^2}{3}| \leq z\right) = P(|V_n^*| \leq z)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(|N| \leq z) = P(-z \leq N \leq z) \\ = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 0,95$$

(calculs arithm-classiques)

(C)

$$\left[\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \leq 3 \right] = \left[\left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \leq \frac{4\pi^2}{3\sqrt{5n}} \cdot 3 \right]$$

$$\subset \left[\left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \leq \frac{6\pi^2}{3\sqrt{5n}} \cdot 2 \right]$$

$$= \left[V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}} \leq \frac{\pi^2}{3} \leq V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}} \right]$$

$$\text{D'où } P\left(V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}} \leq \frac{\pi^2}{3} \leq V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right)$$

$$\geq P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2} \left| V_n - \frac{\pi^2}{3} \right| \leq 3\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,95$$

Bilan: $\left[V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}} ; V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}} \right]$

est un intervalle de confiance de π au niveau de confiance 95%.

(d) Finalement, (avec $V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}$ positif pour n assez grand)

$$\left[\sqrt{3V_n - \frac{128}{\sqrt{5n}}} ; \sqrt{3V_n + \frac{128}{\sqrt{5n}}} \right] \text{ est un intervalle}$$

de confiance de π au niveau de confiance 95%.

22. L'estimateur semble bien converger vers $\pi \approx 3,14$ (17)

L'intervalle de confiance se "resserre" bien autour de π .

23. Il semble que quel que soit n , l'intervalle de confiance est au niveau de confiance de 95% (et pas seulement de façon asymptotique).

FIN

Bilan: joli sujet, essai progressif, beaucoup de classiques, beaucoup d'algèbre...

Dans les classiques:

- diagonalisation simultanée de matrices qui commutent (avec n valeurs propres distinctes...)
- encadrement de $\langle f(x), x \rangle$ à l'aide des valeurs propres
- suite, limite. Espérance de X admettant une densité paire.
- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suivi d'une formule sur des intégrales
- TCL, estimateur, $\Phi(3) = 0,995$...